

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 marzo 1924.

V. SCIALOJA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI.

Matematica. — *Ancora sulle funzioni trascendenti semplici.*

Nota del Socio S. PINCHERLE ⁽¹⁾.

1. In una precedente Nota, presentata all'Accademia nella sua seduta del 13 gennaio u. s., ho dato alcune proprietà delle funzioni analitiche o rami ad un valore di funzioni analitiche che in tutto il piano della variabile complessa x , ad eccezione di un taglio t fatto fra 1 e $+\infty$ lungo il semiasse reale positivo, sono rappresentate da espressioni della forma

$$(1) \quad f(x) = \int_1^{\infty} \frac{\sigma(t) dt}{t-x},$$

dove $\sigma(t)$ è una funzione della variabile reale t tale che sia convergente l'integrale

$$(2) \quad \int_1^{\infty} \frac{\sigma(t) dt}{t}.$$

Una tale funzione (1), cui ho dato il nome di trascendente semplice e che è una trasformata della $\sigma(t)$, è, come si è visto, regolare in tutto il piano x ad eccezione al più del taglio t ; è rappresentabile, per $|x| < 1$, da una serie di potenze $\sum c_n x^n$ il cui coefficiente c_n è il valore, per $z=n$, di una funzione determinante regolare per $R(z) > 0$; di questa ultima proposizione vale la reciproca; infine il salto della $f(x)$ quando x attraversa il taglio t è dato da $2\pi i \sigma(t)$ se nel punto t di t la $\sigma(t)$ è continua, e da

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

$\pi i(\sigma(t+0) + \sigma(t-0))$ se t è per $\sigma(t)$ un punto di discontinuità di prima specie. Queste proprietà si mantengono senza modificazioni di carattere essenziale se alla condizione della convergenza di (2) si sostituisce quella della convergenza di

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t) dt}{t^m}, \quad m > 1.$$

2. Si sostituisca ora, nella (1), l'espressione

$$(3) \quad \frac{1}{t-x} = \int_0^\infty e^{-(t-x)u} du$$

valida per $R(t) > R(x)$ e quindi, nel nostro caso, per $R(x) < 1$; viene allora, invertendo le integrazioni, il che è manifestamente lecito:

$$(4) \quad f(x) = \int_0^\infty e^{ux} \int_1^\infty e^{-ut} \sigma(t) dt du.$$

Ora, l'espressione

$$\varphi(u) = \int_1^\infty e^{-ut} \sigma(t) dt$$

rappresenta una funzione determinante regolare nel semipiano $R(u) > 0$, come si vede subito, in forza della convergenza di (2), per mezzo di una dimostrazione perfettamente simile a quella data al n. 1 della Nota precedente; pertanto la (4), che si può scrivere

$$(4') \quad f(x) = \int_0^\infty e^{ux} \varphi(u) du,$$

mostra che $f(x)$ è alla sua volta una funzione determinante, che la (4) rappresenta regolare nel semipiano $R(x) < 0$. Abbiamo così ottenuto che « una funzione semplice è funzione determinante di una funzione determinante ».

3. La reciproca di questa proposizione è immediata. Sia infatti data su t la funzione $\sigma(t)$, tale che l'integrale (2) sia convergente; ne segue che la funzione determinante

$$(5) \quad \varphi(u) = \int_1^\infty \sigma(t) e^{-tu} dt$$

è regolare nel semipiano $R(u) > 0$ e tende a zero per u tendente all'infinito lungo le direzioni comprese fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (estremi esclusi). Si formi ora la determinante di questa determinante

$$(6) \quad f(x) = \int_0^\infty e^{ux} \varphi(u) du,$$

che l'integrale stesso rappresenta regolare nel semipiano $R(x) < 0$; sostituendo nell'espressione (5) di $\varphi(u)$ e tenendo conto della (3) poichè la condizione $R(x) < R(t)$ è soddisfatta, viene, invertendo le integrazioni:

$$f(x) = \int_1^{\infty} \frac{\sigma(t) dt}{t-x};$$

la $f(x)$ viene dunque ad essere una funzione semplice.

È da notare che nella (6) l'integrazione si sarebbe potuto fare, invece che lungo il semiasse reale positivo, lungo una semiretta arbitraria uscente da 0 e di azimut α , $(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$: si sarebbe avuta allora per $f(x)$ un'espressione valida nel semipiano contenente il semiasse reale negativo e limitato dalla retta, passante per l'origine, perpendicolare al raggio di azimut $-\alpha$.

4. Si cerchi il comportamento asintotico di (1) quando x tende all'infinito secondo una direzione di azimut differente da zero. All'uopo, si conducano a partire dal punto 1 due semirette a, a' di azimut $\pm \alpha$, essendo α un angolo arbitrariamente piccolo; si tolga dal piano x l'angolo di ampiezza 2α formato da queste semirette e si dica X la parte del piano che rimane. In tutto X , sappiamo (Nota preced., n. 2) che la

$$f(x, u) = \int_1^u \frac{\sigma(t) dt}{t-x}$$

tende uniformemente ad $f(x)$; pertanto, preso ε positivo arbitrariamente piccolo, si può determinare \bar{u} tale che per $u > \bar{u}$ sia, qualunque sia x in X ,

$$|f(x) - f(x, u)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fissato $u > \bar{u}$, la $f(x, u)$ essendo funzione analitica regolare per $|x| > u$ e nulla all'infinito, si può prendere r positivo tale che per $|x| > r$ sia

$$|f(x, u)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

ne segue $|f(x)| < \varepsilon$ per $|x| > r$ in X , e quindi, per x tendente all'infinito per qualsiasi direzione di azimut non nullo, $f(x)$ tende a zero, ed escluso l'azimut nullo mediante l'angolo 2α , piccolo a piacere, delle semirette a, a' , vi tende uniformemente.

5. Dal centro 1 con raggio R si descriva un arco di cerchio, di ampiezza $2(\pi - \alpha)$, che dalla semiretta a vada alla semiretta a' , e si consideri l'area compresa fra codesto arco ed i due segmenti, fra 1 ed $1 + Re^{i\alpha}$ e fra 1 ed $1 + Re^{-i\alpha}$, che esso stacca su a, a' rispettivamente; si indichi con (c) il contorno di questa area, percorso nel senso positivo. Entro questa area, che è contenuta in X , la $f(x)$ è regolare e ad un valore, e si ha

pertanto, per x interno all'area stessa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(t) dt}{t-x};$$

ma, in forza del n. 4, la parte dell'integrale estesa all'arco di cerchio tende a zero per $R \rightarrow \infty$; rimane quindi, passando al limite per $R \rightarrow \infty$,

$$2\pi i f(x) = \int_1^{1+\infty e^{i\alpha}} \frac{f(t) dt}{t-x} - \int_1^{1+\infty e^{-i\alpha}} \frac{f(t) dt}{t-x}.$$

Sostituendo la (3), nell'ipotesi $R(x) < 1$, viene

$$(7) \quad 2\pi i f(x) = \int_0^\infty e^{ux} \left(\int_1^{1+\infty e^{i\alpha}} f(t) e^{-ut} dt - \int_1^{1+\infty e^{-i\alpha}} f(t) e^{-ut} dt \right) du;$$

ma poichè la differenza degli integrali sotto il segno nel secondo membro è, al pari della $\varphi(u)$ data dalla (5), funzione continua (anzi analitica) di u , così, per un noto teorema di Lerch ⁽¹⁾, le due funzioni generatrici in (6) e (7) devono coincidere, e quindi per ogni α fra 0 e $\pi/2$,

$$(8) \quad 2\pi i \int_1^\infty e^{-ut} \sigma(t) dt = \\ = e^{-u} \int_0^\infty \left(e^{i\alpha} f(1+re^{i\alpha}) e^{-ure^{i\alpha}} - e^{-i\alpha} f(1+re^{-i\alpha}) e^{-ure^{-i\alpha}} \right) dr,$$

estensione della proposizione del n. 5 della precedente Nota.

6. La relazione di dipendenza (1) fra la funzione trascendente semplice $f(x)$ ed il suo salto $2\pi i \sigma(t)$ appartiene a quelle trasformazioni funzionali, ripetutamente sfruttate nella teoria delle equazioni differenziali lineari, e dette trasformazioni di Euler e di Heine ⁽²⁾. La proprietà notevole della (1) è quella di conservare, sotto condizioni assai larghe per la $\sigma(t)$ e all'infuori di un termine razionale addittivo, la moltiplicazione per la variabile e la derivazione, nel senso che se $f(x)$ è la trasformata di $\sigma(t)$, $xf(x)$ lo è di $t\sigma(t)$ e $\frac{df(x)}{dx}$ di $\frac{d\sigma(t)}{dt}$, all'infuori di termini addittivi razionali: ogni operazione differenziale lineare applicata ad $\sigma(t)$ viene dunque a rispecchiarsi su $f(x)$, onde a questa trasformazione potrebbe venire dato il nome di *quasi-identità* al punto di vista algoritmico: e così la trasformazione di Laplace-Abel, che applicata per due volte consecutive conduce (n. 2, 3) alla quasi identità, trova confermato il suo carattere *quasi-involutorio*, già notato molti anni or sono da U. Amaldi ⁽³⁾.

(1) Vedi i miei *Elementi della teoria delle funzioni analitiche*, pp. 334-336.

(2) Ibid., pag. 348.

(3) Questi Rendiconti, serie 5^a, vol. VII, pag. 117 (1898).

Zoologia. — *Sull'Anopheles elutus*. Nota del Socio B. GRASSI ⁽¹⁾.

Nel 1901 notavo per primo che nelle uova di *A. claviger* eccezionalmente mancano le camere d'aria e ciononostante le uova galleggiano e continuano a svilupparsi.

Lo stesso fatto veniva osservato nel 1919 dal maggiore Christophers in Mesopotamia e comunicato al capitano Barraud, che nel 1921 pubblicava di aver confermata l'osservazione anche in Palestina. Egli aveva allevato queste uova senza camera d'aria e aveva così potuto vedere che le ali degli individui, che da esse si sviluppano, sono specialmente nel maschio macchiate meno distintamente e in alcuni casi perfino immacolate.

Egli perciò proponeva di farne una varietà dell'*A. claviger* e aggiungeva che essa è diffusa in Palestina, in Siria e in Cilicia e che la forma europea non era ancora stata trovata in Palestina, ma che le due forme si trovano insieme in Macedonia.

Alcuni mesi più tardi S. W. Edwards tornava sull'argomento nella sua Memoria sui Mosquitos della regione Palearctica e osservava che le uova della forma in discorso sono così diverse da quelle dell'*A. claviger* che è impossibile considerarla appartenente ad una semplice varietà, nonostante l'identità delle larve e la stretta somiglianza tra gli adulti. Egli accenna come tipo un maschio depositato nel Museo Britannico, allevato dalla larva in Palestina dallo stesso capitano Barraud. Negli adulti le minime differenze sarebbero costituite: 1°) dalla mancanza di una macchia pallida nella frangia all'apice dell'ala, essendo la frangia uniformemente nera; 2°) dal pochissimo sviluppo delle macchie nere delle ali, di spesso difficilmente percettibili, specialmente nel maschio; 3°) da un ciuffo frontale bianco, piccolo, appena visibile; 4°) dalla colorazione generale del corpo piuttosto più chiara che nel *claviger*, i lati dello scudo essendo non più scuri del mezzo; 5°) dal nono tergite, relativamente meno chitinizato.

Chiunque ha avuto sott'occhio molti *claviger* s'accorge subito che questi caratteri sono insignificanti. D'altra parte, anche secondo Edwards, l'ipopigio maschile, apparato che in tanti casi serve per la distinzione delle specie, nel caso attuale non presenta differenza nelle due forme.

L'unica caratteristica sicura resta pertanto quella delle uova e si sa-

(1) Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

rebbe potuto dubitare che si trattasse di una anomalia, se ogni incertezza non fosse stata rimossa dall'asserzione riportata anche dall'Edwards, che in Palestina come anche nella Bassa Mesopotamia e nella Transcaspia, la forma colle uova senza camera d'aria rimpiazza interamente il *claviger*, mentre in Macedonia (Waterston) le due forme si trovano mescolate e la forma senza camere camera d'aria sembra assente dall'Europa centrale e settentrionale.

Queste, che ho esposte, sono le ragioni per cui l'Edwards ha elevato la forma senza camere d'aria a nuova specie, che denominò *A. elutus*. Egli la cita anche per Cipro (Williamson), per il Caspio occidentale (Venyon), per la Stiria (Strobl) e per la Persia (Shortt).

La creazione della nuova specie *elutus* richiamò la mia attenzione e mi decise a fare nuove indagini.

Nel 1923 dopo molte vane ricerche in diverse parti d'Italia, trovai finalmente nel mese di ottobre a Fiumicino alcune femmine di anofele, che depositarono uova tutte sfornite di camere d'aria. Fidandomi delle ricerche fatte dai suddetti autori, ammisì perciò anch'io l'esistenza in Italia della specie *elutus*, dichiarandola non comune (vedi una mia precedente Nota).

Ma qualche dubbio mi restava sempre nell'animo; perciò avendo conosciuto lo studente G. Mer che si era occupato degli anofeli in Palestina, lo pregai di procurarmi degli esemplari viventi dell'*A. elutus* di quella regione. Egli ha passato la richiesta al Dr. Kliger, che gentilmente ne ha spedito un certo numero in una gabbietta allo stesso G. Mer, il quale si affrettò a portare il materiale ricevuto nel Laboratorio da me diretto. Solo quattro femmine erano ancora vive; di esse tre hanno punto subito (era il 3 gennaio 1924) lo stesso Mer e hanno più tardi depositato le uova. Orbene con nostra meraviglia abbiamo rilevato che, mentre le uova di una di queste tre femmine, erano senza camere d'aria (fig. 1), due invece le presentavano, benché spiccatamente più piccole di quelle dell'*A. claviger* (fig. 2). Sì le



1.



2.

Fig. 1. — Uova senza camere d'aria.

Fig. 2. — Uova con piccole camere d'aria.

Le due figure sono copiate col microscopio Kor. oc. 2, ob. 2, t. accore. Dei 3 anofeli ricevuti dalla Palestina, dove erano stati classificati come *elutus*, uno depositò le uova come fig. 1, due come fig. 2.

une che le altre uova si sono sviluppate normalmente; ne nacquero dei maschi e delle femmine. Le femmine non fecondate, pure avendo punto parecchie volte non hanno depositato le uova, come non le depositano neanche le femmine di *claviger* non fecondate.

Il Mer si affrettò a comunicare i risultati ottenuti agli entomologi che che si occupano di zanzare in Palestina. Ripetute le osservazioni anche colà, si trovarono subito uova della supposta nuova specie, cioè di *elutus* colle camere d'aria. Il sig. Teodor, collaboratore di Buxton, afferma però che l'anno scorso su 80 ovoposizioni di *elutus* da lui esaminate, nessuna presentava camere d'aria!

La cosa è molto strana, perchè il Mer nel 1920 in Chedera (Palestina occidentale) aveva esaminate circa 50 ovoposizioni di un *A. claviger*, notando la presenza delle camere d'aria. Così pure a Kinereth, nella valle del Giordano, nel 1921 aveva osservate parecchie altre ovoposizioni senza rilevare nulla di anormale: egli riteneva perciò che le camere d'aria fossero presenti. Senonchè alla fine del 1922, cioè dopo che l'Edwards aveva creato la nuova specie, erano state da lui esaminate due altre ovoposizioni e trovate le uova senza camera d'aria. Conseguentemente il Mer dubitava delle proprie osservazioni fatte nel 1920 e nel 1921 e anch'egli si convinceva che l'*elutus* doveva essere una nuova specie.

I fatti qui esposti riaffacciano fortemente il dubbio che non si tratti di due specie differenti.

Per un giudizio definitivo occorrono nuove ricerche specialmente sull'ipopigio maschile, ricerche delle quali si è incaricata la signorina Dr. La Face.

Sommando tutte queste formule si ottiene:

$$(13) \quad \sigma'_{f+g+h+\dots+s} = \sigma'_f - \sum d_i.$$

A questo punto supponiamo, 1°: $\sigma'_f = 0$, 2°: che $|F + G + H + \dots + R + S|$ sia almeno ∞^2 e a curva caratteristica irriducibile.

Per la 2ª ipotesi e per il ricordato teorema di Severi sarà $\sigma'_{f+g+h+\dots+s} \geq 0$. Ma allora per la 1ª ipotesi, essendo tutte le $d_i \geq 0$, per la (13) sarà:

$$\sigma'_{f+g+h+\dots+r+s} = d_1 = d_2 = \dots = d_s = 0$$

e di conseguenza, risalendo attraverso le (12) e la (11), fino alla (10),

$$\sigma'_{f+g+h+\dots+r+s} = \sigma'_{f+g+h+\dots+r} = \dots = \sigma'_{f+g+h} = \sigma'_{f+g} = \sigma'_f = 0.$$

Ora si osservi che la 2ª ipotesi si può soddisfare senza porre alcuna condizione per le superficie F, G, H, \dots, R , ma scegliendo opportunamente S per es., un multiplo sufficientemente alto dal sistema delle sezioni iper-piane di W . Posto allora $G + H + \dots + R = Q$ si può enunciare il teorema:

VI. — *Se sopra una varietà a tre dimensioni W , il sistema $|F + F|$ aggiunto ad una superficie F è regolare, e Q è una superficie qualunque di W , sulle cui parti irriducibili F stacca curve variabili in sistemi continui infiniti, che non siano fasci irrazionali, il sistema $|F + Q + F|$ aggiunto alla superficie $F + Q$ è regolare, e nel caso di Q irriducibile, stacca su Q stessa un sistema regolare e completo.*

Supponiamo $|F|$ almeno ∞^2 e senza superfici fondamentali. Il sistema lineare $|FG|$ che $|F|$ stacca su una qualsiasi superficie irriducibile G è allora almeno ∞^1 , perchè ove si riducesse ad una sola curva o ad un gruppo di punti, le superfici di $|F|$ per un punto generico di G dovrebbero contenerla per intero e G sarebbe fondamentale per $|F|$. E perciò si ha:

VII. — *Se sopra una varietà a tre dimensioni il sistema $|F + F|$ aggiunto ad un sistema lineare $|F|$, almeno ∞^2 e senza superfici fondamentali, è regolare; ogni sistema $|F + Q + F|$ aggiunto al sistema $|F + Q|$, qualunque sia Q , è regolare.*

Indichiamo con $|G|$ un sistema lineare irriducibile infinito e a grado virtuale positivo. Il sistema $|kG|$ è allora irriducibile ed avrà un sistema aggiunto $|kG + F|$ a sovrabbondanza positiva, sicchè detta q_k la sua dimensione si avrà $q_k \geq [kG] + P_a - 1$.

Ora $[kG] = \binom{k}{3} [G^3] + \binom{k}{2} [G^2] + kG - \binom{k-1}{2}$ al variare di k varia con k^3 , quindi al crescere di k la dimensione q_k cresce come k^3 .

Fissiamo sopra W un sistema lineare $|F|$ più volte infinito, irriducibile e senza superfici fondamentali e col sistema aggiunto $|F + \Gamma|$ irriducibile e regolare. Il sistema $|kG + \Gamma|$ stacca sulla generica superficie $(F + \Gamma)$ un sistema lineare la cui dimensione, al crescere di k cresce come k^2 . Per un valore molto grande di $k (> k_0)$ il sistema $|kG + \Gamma|$ deve allora contenere parzialmente il sistema $|F + \Gamma|$. Poniamo:

$$|Q| = |(kG + \Gamma) - (F + \Gamma)| = |kG - F|$$

ossia

$$|kG| = |F + Q|.$$

Per le ipotesi fatte sul sistema $|F|$ e per il teorema VII anche il sistema $|kG + \Gamma|$ è regolare e si conclude:

VIII. — *Se in una varietà a tre dimensioni il sistema di superficie $|G|$ è infinito, irriducibile e a grado virtuale positivo, per k molto grande ($k > k_0$) i sistemi $|kG + \Gamma|$, aggiunti ai sistemi $|kG|$, sono tutti regolari.*

Il Severi nella citata memoria (n. 22) dimostra che per k molto grande il sistema $|kG + \Gamma|$ è a sovrabbondanza costante; il teorema precedente dimostra che tale costante è nulla.

2. Ciò detto siano V e V' due varietà a quattro dimensioni, immerse in certi spazi S_r, S'_r , senza punti multipli ed in corrispondenza birazionale fra di loro.

Indichiamo con P_a e P'_a i rispettivi generi aritmetici e poniamo:

$$P_a - P'_a = \alpha.$$

Si vuol dimostrare che α è uguale zero.

Indichiamo con $|E|$ e con $|F'|$ i sistemi di sezioni iperpiane di V e V' .

Chiameremo con $|E'|$ il sistema di V' corrispondente ad $|E|$ e con $|F|$ il sistema di V corrispondente ad $|F'|$.

Per il teorema II il sistema $|\lambda E + \Gamma|$ aggiunto ad $|\lambda E|$ per λ sufficientemente alto ($> \lambda_0$) è regolare ed avrà la dimensione:

$$e_\lambda = [\lambda E] + P_a - 1.$$

Ora i due numeri e_λ e $[\lambda E]$ sono invarianti, quindi sopra V' il sistema corrispondente aggiunto al sistema $|\lambda E'|$ è di dimensione:

$$e_\lambda = [\lambda E] + P'_a - 1 + \alpha$$

cioè: per $\lambda > \lambda_0$, $|\lambda E' + \Gamma|$ è a sovrabbondanza costante α .

Analogamente, sopra V' , per μ maggiore di un certo numero μ_0 , il sistema $|\mu F' + \Gamma|$ aggiunto al sistema $|\mu F'|$ è regolare e di dimensione

$$e'_\mu = [\mu F'] + P'_a - 1$$

e perciò, su V, il corrispondente sistema $|\mu F + I|$ è di dimensione:

$$\rho'_\mu = [\mu F] + P_a - 1 - \alpha,$$

cioè: per $\mu > \mu_0$, $|\mu F + I|$ è a sovrabbondanza costante $-\alpha$.

Per dimostrare che è $\alpha = 0$, basterà dimostrare che sopra V la sovrabbondanza del sistema $|\mu F + I|$, e sopra V' la sovrabbondanza del sistema $|\lambda E' + I'|$, sono entrambe nulle o negative. Dovendo essere $\alpha \leq 0$ e $-\alpha \leq 0$ sarà $\alpha = 0$ e $P_a = P'_a$.

3. A tal uopo consideriamo sopra V i sistemi $|\lambda E + \mu F + I| = |G_{\lambda\mu}|$ e indichiamo con $\sigma'_{\lambda\mu}$ la corrispondente sovrabbondanza.

Dette $s_{\lambda\mu}$ e $d_{\lambda\mu}$ la sovrabbondanza e la deficienza del sistema che $|G_{\lambda\mu}|$ stacca sopra F, per la (9) si ha:

$$\sigma'_{\lambda\mu} = \sigma'_{\lambda\mu-1} + s_{\lambda\mu} - d_{\lambda\mu}.$$

Facciamo $\mu = 1, 2, \dots, \nu$ e sommiamo, si avrà:

$$(14) \quad \sigma'_{\lambda\nu} = \sigma'_{\lambda 0} + \sum_1^\nu s_{\lambda\mu} - \sum_1^\nu d_{\lambda\mu}.$$

Ora $\sigma'_{\lambda 0}$, sovrabbondanza del sistema $|\lambda E + I|$ per λ sufficientemente alto e per il teorema I è nulla.

In quanto poi ad $s_{\lambda\mu}$, sovrabbondanza sopra F del sistema $|\lambda EF + \mu F^2 + I F|$ aggiunto al sistema $|\lambda EF + (\mu - 1) F^2|$ per λ molto alto e μ qualsiasi è pure nulla. Difatti essendo F una varietà a tre dimensioni il sistema aggiunto al sistema $|\lambda EF|$ per λ maggiore di un certo λ_0 , in virtù del teorema VIII è regolare, e allora per il teorema VII il sistema aggiunto al sistema $|\lambda EF + (\mu - 1) F^2|$ è regolare qualunque sia μ .

Concludiamo che nella (14) per $\lambda > \lambda_0$ son nulli tutte le $s_{\lambda\mu}$ e $\sigma'_{\lambda 0}$ e perciò:

$$(15) \quad \sigma'_{\lambda\nu} = - \sum_1^\nu d_{\lambda\mu} \leq 0$$

per $\lambda > \lambda_0$ e ν qualsiasi.

Fissiamo un valore di $\lambda > \lambda_0$ e consideriamo il sistema $|H|$ che $|G_{\lambda\nu}|$ stacca sulla generica (λE) :

$$|H| = |(\lambda E)^2 + \nu F(\lambda E) + I(\lambda E)|.$$

Tale sistema sopra (λE) è aggiunto al sistema $|\nu F(\lambda E)|$ e per ν molto grande è regolare in virtù del teorema VIII.

Dico che $|H|$ è anche completo. Difatti consideriamo sopra V' il corrispondente sistema $|H'|$ staccato sulla generica $(\lambda E')$ dal sistema $|G'_{\lambda\nu}| =$

$= |\lambda E' + \nu F' + I'|$. Essendo V' priva di punti multipli, per ν molto grande il sistema $|G'_{\lambda\nu}|$ è regolare e completo in virtù del teorema V; e stacca sopra $(\lambda E')$ un sistema $|H'|$ regolare per il teorema VIII.

D'altra parte il sistema residuo $|G'_{\lambda\nu} - (\lambda E')| = |\nu F' + I'|$ per il teorema II, se ν è molto grande, è pur esso regolare, ma allora applicando il teorema IV, si ricava che $|H'|$ è completo.

Nel passaggio da V' a V tale completezza rimane invariata quindi per ν maggiore di un certo numero ν_0 sufficientemente alto, $|H|$ è completo. Ma se il sistema completo $|G_{\lambda\nu}|$, stacca su $|\lambda E|$ un sistema $|H|$ regolare e completo per la (9), la sovrabbondanza $\sigma'_{\lambda\nu}$ di $|G_{\lambda\nu}|$ è uguale alla sovrabbondanza σ'_{ν} del sistema residuo $|G_{\lambda\nu} - \lambda E| = |\nu F + I|$, cioè $\sigma'_{\lambda\nu} = \sigma'_{\nu}$ per $\lambda > \lambda_0$ e $\nu > \nu_0$. Ora $\sigma'_{\lambda\nu}$ è proprio $-\alpha$, quindi per la (15) è $-\alpha \leq 0$.

Ragionando analogamente sopra V' si trova che è $\alpha \leq 0$ e perciò è $\alpha = 0$ e $P_a = P'_a$. C. V. D.

4. In tutto quello che abbiamo detto è essenziale che V e V' siano prive di singolarità. Per completare le nostre considerazioni, sia W una varietà a quattro dimensioni dotata di singolarità arbitrarie e V e V' due varietà senza punti multipli, in corrispondenza birazionale con W e quindi fra di loro.

Per il teorema dimostrato V e V' hanno lo stesso genere aritmetico, cioè $p_4 = p'_4 = P_a = P'_a$. È lecito perciò chiamare genere aritmetico effettivo di W questo numero P_a . Con tale definizione due varietà W e W' comunque dotate di singolarità ed in corrispondenza birazionale fra di loro hanno lo stesso genere aritmetico, il genere aritmetico cioè di una varietà V senza punti doppi, in corrispondenza birazionale con esse.

Nulla potrebbe però dirsi, per una *eventuale* varietà W che non potesse trasformarsi birazionalmente in un'altra priva di punti multipli. Limitazione che per ora rimane in questi studi. D'altronde per una tale varietà (eventuale) allo stato attuale della scienza, manca anche la definizione di genere aritmetico effettivo e tutto è da costruire.

Matematica. — *Due semplici espressioni del numero dei numeri primi compresi entro limiti assegnati.* Nota del dott. LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Sono note varie espressioni del numero $N_{\alpha, \beta}$ dei numeri primi compresi entro limiti assegnati α, β ; e per una completa bibliografia su questo argomento ritengo opportuno rimandare all'opera classica del Landau. *Handbuch der Lehre der Vertheilung der Primzahlen*, Teubner, 1909. Fra i lavori italiani mi limiterò a ricordare quello del prof. Levi-Civita ⁽¹⁾, che ottiene $N_{\alpha, \beta}$ mediante l'indicatore logaritmico di una funzione $P(z)$, ricavata dalla serie di Lambert, che si annulla per $z = -n$, con n primo, e una Nota del dott. Sbrana ⁽²⁾, in cui $N_{1, \beta}$ è dato come limite di una certa sommatoria.

Nonostante ciò mi sembra di un certo interesse riportare due nuove espressioni che, essendo ottenute mediante trascendenti ben note e di facile trattazione, sembrano suscettibili di ulteriori sviluppi e applicazioni.

2. Vediamo intanto le proprietà più evidenti della funzione

$$(1) \quad F(z) = \operatorname{sen}^2 \pi z + \operatorname{sen}^2 \left(\pi \frac{\Gamma(z) + 1}{z} \right)$$

che è senza dubbio molto meno complessa, tanto della $\zeta(s)$ di Riemann, che della $P(z)$ di Levi-Civita, o della $\Theta(z)$ di Von Koch, contenendo soltanto funzioni trigonometriche e la $\Gamma(z)$ Euleriana, le cui proprietà e relazioni, anche colle stesse funzioni trigonometriche, sono ben conosciute.

Osserviamo che, avendo la $\Gamma(z)$ dei poli per $z = 0, -1, -2, \dots -n, \dots$, anche la $F(z)$ avrà delle singolarità essenziali pei valori interi negativi o nulli dell'argomento e per $z = \infty$, punto di condensazione dei precedenti, ma sarà uniforme e regolare per qualsiasi altro valore di z nel piano complesso.

Essa poi, per qualsiasi valore reale di z , essendo data come somma di due quadrati reali, sarà sempre positiva, e sull'asse reale potrà annul-

⁽¹⁾ T. Levi-Civita, *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo*. Rend. Acc. Lincei, 1895, 1° sem.

⁽²⁾ F. Sbrana, *Sul numero dei numeri primi inferiori ad un limite assegnato*. Rend. Acc. Lincei, 1922, 2° sem.

larsi allora e allora soltanto che siano separatamente nulli i suoi due termini, quando cioè sia contemporaneamente

$$(2) \quad \begin{cases} \text{sen } \pi z = 0, \\ \text{sen} \left(\pi \frac{F(z) + 1}{z} \right) = 0 \end{cases}$$

Perchè sia soddisfatta la 1^a equazione, dovrà intanto z essere uguale a un numero intero n , certamente positivo [altrimenti la $F(z)$ avrebbe in n una singolarità essenziale e non una radice]; perchè poi sia soddisfatta anche la 2^a equazione, occorrerà evidentemente che sia intero anche il numero

$$(3) \quad q(z) = \frac{F(z) + 1}{z} = \frac{(n-1)! + 1}{n}.$$

Ma il ben noto teorema di Wilson ⁽¹⁾ dice che questa espressione sarà eguale a un numero intero (per n intero) *allora e allora soltanto che n è un numero primo*. Quindi in conclusione abbiamo che:

La funzione $F(z)$, definita dalla (1), gode della proprietà fondamentale di annullarsi sull'asse reale per quei soli valori di z eguali a un numero intero primo (o all'unità).

3. È questa la proprietà fondamentale della $F(z)$ che applicheremo per le ricerche successive. E infatti, dato che $F(z)$ è regolare in tutto il semipiano $R(z) \geq \varepsilon > 0$, e quindi anche nei punti $z = n$, con n intero positivo, potremo chiudere questi punti $z = n$ con tanti cerchietti C_n di raggio $r_n > 0$ abbastanza piccolo perchè in essi la $F(z)$ non si annulli mai, eccettuato, al più, il solo centro $z = n$; se infatti non fosse possibile determinare questo raggio r_n , significherebbe che $z = n$ sarebbe un punto di concentrazione per le radici di $F(z)$ e quindi sarebbe una singolarità essenziale per $F(z)$ stessa, contrariamente a ciò che abbiamo visto. Osserviamo poi che le radici di $F(z)$ date da $z = p$, con p intero primo, sono tutte radici doppie; infatti, oltre $F(p) = 0$, è anche

$$F'(z) = \pi \text{sen } 2\pi z + \pi \text{sen } [2\pi q(z)] \cdot q'(z)$$

e quindi $F'(p) = 0$, mentre invece è

$$F''(z) = 2\pi^2 \cos 2\pi z + 2\pi^2 \cos [2\pi q(z)] \cdot q'(z)^2 + \pi \text{sen } [2\pi q(z)] \cdot q''(z)$$

e perciò

$$F''(p) = 2\pi^2 + 2\pi^2 q'(p)^2 \neq 0$$

dove $q(z)$ è definita dalla (3).

Segue di qui che l'indicatore logaritmico di Cauchy

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{F'(z)}{F(z)} dz$$

⁽¹⁾ Dimostrato da Eulero. Per una dimostrazione cfr. ad es.: Dirichlet, *Lezioni sulla teoria dei numeri*. Trad. del Faifofer. Venezia, Tipografia Emiliana, 1881.

sarà eguale a 2 (molteplicità della radice) se n è un numero primo, a 0 se n non è primo e non è quindi radice della $F(z)$.

Avremo dunque che il numero $N_{\alpha, \beta}$ dei numeri primi compresi tra α e β sarà evidentemente

$$(4) \quad N_{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} \sum_n^{\beta} I_n = \sum_n^{\beta} \frac{1}{4\pi i} \int_{c_n} \frac{F'(z)}{F(z)} dz$$

ove la $F(z)$ è la solita funzione definita dalla (1).

4. Questa è la prima espressione di $N_{\alpha, \beta}$, ottenuta mediante l'indicatore logaritmico di Cauchy, e seguendo lo stesso metodo del prof. Levi-Civita. Servendosi però sempre di questa funzione $F(z)$ vediamo ora come possiamo ricavare un'altra espressione, forse ancora più semplice, di $N_{\alpha, \beta}$ senza ricorrere ad integrazioni. Osserviamo perciò che l'espressione

$$(5) \quad G(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 \pi z}{F(z)} = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 [\pi q(z)]}{\operatorname{sen}^2 \pi z}}$$

rappresenta una funzione di z che si annulla per z uguale a un intero n non primo, mentre per z uguale a un numero primo p assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. È però evidente che la funzione stessa è definita anche per $z = p$, poichè infatti è

$$\lim_{z=p} G(z) = \frac{1}{1 + \left[\lim_{z=p} \frac{\operatorname{sen} [\pi q(z)]}{\operatorname{sen} \pi z} \right]^2}$$

ed essendo

$$\lim_{z=p} \frac{\operatorname{sen} [\pi q(z)]}{\operatorname{sen} \pi z} = \lim_{z=p} \frac{\pi \cos [\pi q(z)] \cdot q'(z)}{\pi \cos \pi z} = q'(p)$$

sarà

$$\lim_{z=p} G(z) = \frac{1}{1 + q'(p)^2}.$$

Dunque $G(z)$ risulta una funzione con singolarità essenziali negli stessi punti di $F(z)$ e con poli, eventualmente, in quei punti in cui si annulla $F(z)$, ma non $\operatorname{sen}^2 \pi z$ e cioè nelle eventuali radici possedute da $F(z)$ fuori dell'asse reale, mentre invece sulla parte positiva di questo, e più precisamente pei valori interi, prende il valore 0 per z uguale a un intero non primo, e il valore

$$\frac{1}{1 + q'(p)^2}$$

per z uguale a un intero primo p . Se allora costruiamo la nuova funzione

$$(6) \quad H(z) = G(z) \cdot [1 + q'(z)^2] = \frac{1 + q'(z)^2}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 [\pi q(z)]}{\operatorname{sen}^2 \pi z}}$$

questa sarà certo regolare dove è regolare la $G(z)$, e quindi, in particolare, lungo tutto il semiasse reale $n > \epsilon > 0$; e pei valori interi n dell'argomento assumerà evidentemente il valore 1 o 0 secondochè n è primo o no. Ma allora il numero $N_{\alpha, \beta}$ dei numeri primi compresi tra α e β sarà dato semplicemente da

$$(7) \quad N_{\alpha, \beta} = \sum_{n=\alpha}^{\beta} H(n)$$

ove $H(z)$ è definita dalla (6), e la $q(z)$, che vi compare, dalla (3).

In questa espressione del numero $N_{\alpha, \beta}$, costruita mediante la funzione $H(z)$ (somigliante alla Θ di Von Koch, ma molto più semplice) compaiono soltanto la funzione $\text{sen } z$ e la $\Gamma(z)$ Euleriana colla sua derivata; è infatti

$$q'(z) = \frac{z \Gamma'(z) - \Gamma(z) - 1}{z^2}.$$

Matematica. — *Sui complessi algebrici di rette di S_n .* Nota di BENIAMINO SEGRE, presentata dal Socio C. SEGRE ⁽¹⁾.

1. Sia Ω un complesso (od insieme ∞^{2n-3}) algebrico di rette di S_n , generale, di ordine m .

Un fascio di rette generico dello S_n contiene m rette di Ω . Un fascio siffatto si dirà *tangente* ad Ω in una sua retta, se questa sta nel fascio considerato, ed assorbe *due* (almeno) delle m rette del complesso che a quello appartengono. Uno spazio $S_{n'}$ subordinato generico di S_n contiene $\infty^{2n'-3}$ rette di Ω , costituenti in quello un complesso algebrico di rette, ancora d'ordine m , che si dirà *sezione* di Ω collo $S_{n'}$ considerato. Per un punto R generico di S_n escono ∞^{n-2} rette di Ω , costituenti un R -cono algebrico di ordine m , il quale si dirà il cono del complesso *relativo* al punto R considerato.

Se r è una retta generica di S_n , i coni del complesso relativi ai vari punti R di r , costituiscono un sistema Σ irriducibile ∞^1 , algebrico, anzi razionale, d'indice m , di forme F^m di S_n aventi un punto R m -plo variabile. Il sistema lineare di appartenenza di Σ ⁽²⁾ è di dimensione non superiore ad m ; anzi, se r non sta su ogni F^m di Σ , e cioè r non è retta del dato complesso Ω , quella dimensione deve proprio valere m [cfr. op. cit.

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

⁽²⁾ Ved. il n. 6 della mia Nota: *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme* (questi Rendiconti, fascicolo prec.).

in ⁽²⁾, n. 6 d)]. Pertanto se r è una retta generica di S_n , il sistema Σ ad essa relativo appartiene ad un sistema lineare ∞^m di F^m dello S_n , onde esso non contiene nessuna forma singolare pel sistema stesso [ved. op. cit. a pag. 218 in ⁽²⁾, n. 1].

Se la retta r appartiene al complesso, le F^m del sistema Σ costruito come s'è detto passano tutte per la retta stessa; se tutte vi passano con molteplicità $k > 1$ ⁽¹⁾, la r si dirà *retta k -pla* del complesso. In tal caso uno spazio per r sega Ω secondo un complesso di rette avente ancora r per retta k -pla (almeno); in particolare le curve del complesso situate in piani per r hanno questa retta come tangente k -pla; ed essa assorbe k (almeno) delle m rette del complesso che stanno in un qualunque fascio di rette che la contenga; e viceversa.

2. I coni del complesso (relativi ai vari punti di S_n) sono ∞^n . Uno generico di questi sarà privo di generatrici multiple; ∞^{n-1} di tali coni avranno una retta doppia, onde saranno ∞^{n-1} (al più) le rette di Ω doppie per coni del complesso. Ne segue che una retta r di Ω è generalmente semplice per tutti i coni del complesso relativi ai vari suoi punti.

Sia r una retta generica di Ω . Consideriamo gli ∞^1 iperpiani, passanti per r , che toccano lungo questa retta i coni del complesso relativi ai vari suoi punti: dico che essi *variano in un fascio*. Infatti un piano π generico passante per r contiene una curva del complesso di cui r è tangente semplice, e di cui sia R il relativo punto di contatto. Il piano π sta in uno ed un solo di quegli iperpiani, che è quello che tocca lungo r il cono del complesso relativo ad R . E ciò dimostra l'asserto. Risulta di più che uno generico di quegli iperpiani non può toccare due diversi di quei coni; pertanto:

Fra i punti di r e gli iperpiani (formanti fascio) tangenti lungo r ai coni del complesso relativi ai vari punti di questa retta, intercede una corrispondenza proiettiva, se si dicono omologhi un punto ed un iperpiano quando questo tocca lungo r il cono del complesso relativo al primo.

Si può anche dire: Una retta r generica di Ω è contenuta in ∞^{n-1} fasci di rette, di cui solo ∞^{n-2} toccano in essa il dato complesso; quelli fra questi ultimi che hanno per centro un dato punto di r , riempiono un iperpiano variante in un fascio: fra il punto di r e l'iperpiano relativo intercede una corrispondenza proiettiva.

3. Per ogni retta r generica del dato complesso si ha dunque uno S_{n-2} , che la contiene, base del suddetto fascio di iperpiani. Tale S_{n-2} è il luogo dei piani per r , la cui curva del complesso ha questa retta come tangente doppia (almeno); esso pertanto sega Ω secondo un complesso che ha doppia la retta r ; ed è il solo S_{n-2} per r che goda di tale proprietà.

⁽¹⁾. Per il che basta che ciò capiti per k di quelle forme.

Si hanno così ∞^{2n-3} S_{n-2} di S_n , costituenti un complesso Θ algebrico di S_{n-2} , proiettivamente legato ad Ω ⁽¹⁾.

Due complessi come Ω e Θ si diranno fra loro *associati*.

4. Fra le rette di Ω ve ne sono di quelle per cui la corrispondenza proiettiva considerata al n. 2 degenera. Sia r una di queste rette, semplice per il complesso: essa si dirà *retta singolare* di questo. Ad r apparterranno — elementi fondamentali della suddetta corrispondenza — un punto R ed un iperpiano \mathfrak{A} , che si diranno rispettivamente punto ed iperpiano *singolari* del dato complesso. Saranno tangenti ad Ω lungo r tutti i fasci di rette contenenti r , ed il cui centro è R , oppure il cui piano sta in \mathfrak{A} . Ciò significa che il cono del complesso relativo ad R ha doppia la retta r ; e che il complesso di rette sezione di Ω con \mathfrak{A} ha doppia la retta r .

Inversamente sia r una retta semplice di Ω , che sia doppia per il cono del complesso relativo ad un suo punto R . Tutti i fasci di rette col centro in R e che contengono r , toccano Ω in questa retta; di più se \mathfrak{A} è l'iperpiano tangente lungo r al cono del complesso relativo ad un punto di r distinto da R , tutte le curve del complesso che stanno in piani di \mathfrak{A} passanti per r hanno questa retta come tangente doppia: pertanto \mathfrak{A} sega Ω secondo un complesso di rette di cui r è retta doppia; ed inoltre Ω è toccato in r da ogni fascio di rette dello S_n contenente questa retta, ed il cui piano stia in \mathfrak{A} .

Se invece è dato un iperpiano \mathfrak{A} che seghi Ω secondo un complesso di rette avente una retta doppia r , consideriamo un piano π per r non situato in \mathfrak{A} , e sia R il punto di contatto di r colla curva del complesso situata in quel piano. Il cono del complesso relativo ad R passa doppiamente per r , poichè lungo questa retta è toccato da \mathfrak{A} e π . Di più i fasci di rette tangenti ad Ω in r sono distribuiti come s'è detto sopra.

Si è già detto che sono generalmente ∞^{n-1} i coni del complesso con retta doppia. Pertanto:

I punti, gli iperpiani e le rette singolari del complesso sono ∞^{n-1} .

Sono punti singolari quelli per cui il cono del complesso acquista una retta doppia.

Sono iperpiani singolari quelli che segano Ω secondo un complesso con retta doppia. Da qui segue che:

Un complesso di rette generale non ha retta doppia: per un complesso di rette l'avere una retta doppia è condizione semplice.

Sono rette singolari le rette del complesso doppie per coni del medesimo, o doppie per complessi sezioni iperpiane di quello; e ognuno di questi due fatti porta di conseguenza l'altro.

(¹) Ω e Θ coincidono in un unico complesso di rette per $n=3$

Data una retta r singolare di Ω , i coni del complesso col vertice su di essa, hanno lungo r un medesimo iperpiano tangente, che è l'iperpiano singolare relativo ad r : tranne per un cono che ha r doppia, ed il cui vertice è il punto singolare di r ; inoltre le curve del complesso situate nei vari piani per r , la toccano in un punto fisso, che è il detto punto singolare: tranne per ∞^{n-3} di quelle curve, che l'hanno per bitangente, ed i cui piani riempiono un iperpiano, il quale è l'iperpiano singolare di r .

5. In base al numero precedente si hanno a considerare due varietà, l'una luogo dei punti singolari di Ω , l'altra involuppo degli iperpiani singolari di Ω . Ebbene:

Dato un complesso algebrico generico di rette dello S_n , le due varietà luogo dei punti singolari, ed involuppo degli iperpiani singolari del complesso, costituiscono un'unica ipersuperficie, che si dirà l'ipersuperficie singolare del complesso: precisamente questa è toccata in un punto singolare dall'iperpiano singolare ad esso relativo.

Sia P un punto singolare generico di Ω : il cono Π del complesso ad esso relativo avrà una retta doppia p , senza avere altre particolarità. Tracciamo una retta r generica per P : si tratta di vedere quando essa tocchi in P l'ipersuperficie luogo dei punti singolari di Ω .

Costruiamo il sistema Σ relativo ad r , come si è detto al n. 1: questo sistema avrà un certo numero di coni con retta doppia ⁽¹⁾, in corrispondenza ai punti singolari che stanno su r . Fra quelli vi è sempre il cono Π : si tratta di vedere come va scelta r , affinchè questo assorba due (almeno) di quei coni con retta doppia.

Ora seguendo Σ con un iperpiano generico, ed applicando i teoremi dei n. 2 b), 2 c), e 5, del lavoro citato in ⁽²⁾ a pag. 218, si vede che affinchè ciò capiti è necessario che la retta p stia sull'involuppo del sistema Σ considerato.

Questo involuppo è una ipersuperficie d'ordine $2m(m-1)$ passante per la retta r colla molteplicità $m(m-1)$; essa è ulteriormente segata dai piani per r secondo curve d'ordine $m(m-1)$ che non sono altro che le curve del complesso situate in quei piani ⁽²⁾.

Affinchè dunque la retta r presenti la particolarità richiesta, occorre che dalla curva d'ordine $m(m-1)$ involupata dalle rette di Ω site nel piano rp , si stacchi, debitamente contata, la retta p . Ciò implica che questa sia una bitangente di quella curva, onde (n. 4) il piano suddetto, e quindi

⁽¹⁾ Tale numero non è che l'ordine della ipersuperficie singolare del complesso, e quindi vale: $(n-1)m(m-1)^{n-1}$. Cfr. C. H. Sisam, Atti Acc. Torino, 46 (1911), p. 481.

⁽²⁾ Infatti le superficie sezioni di quella con S_3 per r , non sono altro che le note superficie del complesso (di Plücker) relative alla retta r ed ai complessi sezioni di Ω con quegli S_3 .

pure la retta r , dovrà stare nell'iperpiano singolare relativo al punto P considerato. E questo è ciò che dovevasi dimostrare.

6. Sia ϱ uno S_{n-2} di S_n che seghi Ω secondo un complesso con retta doppia r . Potranno solo presentarsi due casi, e cioè: o r è retta singolare di Ω , ed allora ϱ sta necessariamente nel suo iperpiano singolare (n. 4); oppure r non è retta singolare di Ω , ed in tal caso ϱ è lo S_{n-2} che le è associato secondo quanto si è detto al n. 3. Gli S_{n-2} del primo tipo sono solo ∞^{2n-4} , quelli del secondo sono ∞^{2n-3} , e comprendono i primi come caso particolare. Dunque:

Gli S_{n-2} che segano Ω secondo un complesso di rette con retta doppia sono ∞^{2n-3} , e costituiscono il complesso Θ associato ad Ω . I due complessi Θ ed Ω sono riferiti birazionalmente fra di loro.

7. Al n. 3 si è introdotto accanto al dato complesso di rette Ω , il complesso associato Θ . Con ragionamento duale si è tratti a considerare il complesso di rette di S_n associato a Θ : ebbene questo non è che il complesso di rette di partenza, Ω .

Sia infatti ϱ uno S_{n-2} generico di Θ , associato quindi ad una retta r generica di Ω . Consideriamo il fascio d'iperpiani di asse ϱ ; in ogni iperpiano di questo fascio avremo ∞^{n-2} S_{n-2} di Θ , che invilupperanno una ipersuperficie; il punto di contatto di questa con ϱ varia descrivendo una retta: si tratta di far vedere che questa è la retta r .

L'ipersuperficie considerata entro un iperpiano per ϱ non è altro (n. 4, 5) che l'ipersuperficie singolare del complesso sezione di Ω con quell'iperpiano. Questo complesso ha ϱ come iperpiano singolare, e la retta singolare relativa a ϱ è la r . Pertanto effettivamente (n. 5) l'ipersuperficie considerata tocca ϱ in un punto di r .

8. Senza proseguire questo studio, notiamo che esso diventa assai complicato, quando lo si voglia fare in modo completo e generale. Sarà quindi bene limitarci al caso più semplice dei complessi quadratici di rette dello spazio a 4 dimensioni, caso che mi propongo di studiare in un prossimo lavoro.

Fisica. — *Sulla conducibilità elettrica delle fiamme contenenti sali alcalini.* Nota di A. PONTREMOLI, presentata dal Socio CORBINO.

H. A. Wilson a conclusione dei suoi importanti lavori sulla conducibilità delle fiamme contenenti sali alcalini formula una teoria che giustifica i risultati sperimentali ottenuti e la quale si basa essenzialmente sul concetto che nella fiamma si abbia un equilibrio di ionizzazione tra il metallo alcalino, l'ione positivo e l'elettrone in cui si dissocia per temperatura e gli analoghi costituenti di un prodotto di combustione abbastanza facilmente ionizzabile, contenuto nella fiamma. Con questa ipotesi egli arriva ⁽¹⁾ alla relazione

$$(1) \quad c = \left(\frac{l^2 - 1}{l} \right) (al + b)$$

dove c è la concentrazione totale del sale alcalino per unità di volume, l è la conducibilità della fiamma riferita ad una conducibilità unitaria per $c = 0$, a è una costante che varia con l'elemento alcalino introdotto nella fiamma, b è una costante d'esperienza non dipendente da esso: per grandi conducibilità, tale relazione coincide con quella del Arrhenius secondo cui la conducibilità varia con la radice quadrata della ionizzazione.

Recentemente il Wilson in collaborazione col Noyes ⁽²⁾ ha applicato i noti concetti del Meg Nad Saha sull'equilibrio di ionizzazione per temperatura ⁽³⁾ e ha dimostrato come i valori *relativi* dei potenziali di ionizzazione dei metalli alcalini siano ricavabili con buon risultato dai dati sperimentali sulle conducibilità e che le costanti di ionizzazione concernenti gli equilibri tra atomi indissociati, ioni positivi ed elettroni sono paragonabili a quelle che si ottengono dalla formula della isocora di reazione del Meg Nad Saha per la temperatura della fiamma. Lo scopo di questa Nota è quello di dimostrare come si possa teoricamente ricavare, partendo da costanti universali, dai potenziali di ionizzazione e dalla temperatura della fiamma, non solo il valore relativo dei potenziali di ionizzazione ma anche il valore assoluto della conducibilità nelle zone della fiamma ove sussiste un equilibrio di ionizzazione, le zone cioè a sufficiente distanza

⁽¹⁾ Phil. Trans. Roy. Soc. A., 216, pag. 80, 1915.

⁽²⁾ Astroph. Journ., 157, pag. 20, 1923.

⁽³⁾ Phil. Mag., 40, pag. 472, 1920.

dagli elettrodi in cui vale la legge di Ohm. Ricaveremo così una interpretazione generale delle esperienze del Wilson, condotte appunto in tale regione e che portano alla relazione suscitata.

Riprendiamo la dimostrazione che guida alla (1). Siano K_M la costante di equilibrio di ionizzazione relativa al metallo alcalino M alla temperatura assoluta T , N_M, N_M^+ le concentrazioni per unità di volume di atomi non ionizzati M e ioni positivi M^+ ; K_F, N_F, N_F^+ , gli analoghi valori relativi al prodotto di combustione F contenuto nella fiamma, $(N_E)_0$ la concentrazione degli elettroni, quando la fiamma non contiene M , N_E quella quando M vi sussiste alla concentrazione c . Avremo

$$(2) \quad K_M = \frac{N_M^+ N_E}{N_M}, \quad K_F = \frac{N_F^+ N_E}{N_F}$$

Ammettiamo come le esperienze del Wilson ⁽¹⁾ confermano, che gli ioni positivi nella fiamma abbiano velocità trascurabile rispetto a quella degli elettroni: la conducibilità L secondo la teoria di Drude-Thomson, diventerà

$$(3) \quad L = \frac{N_E e^2}{6 k T} \lambda u$$

ove e, λ, u rappresentano la carica, il cammino libero medio e la velocità di un elettrone, k la costante di Boltzmann. La (3) potrà anche scriversi

$$(4) \quad AL = N_E = N_M^+ + N_F^+$$

dove A è una costante per una data temperatura ed una data fiamma, nè varia con la concentrazione dei sali alcalini finchè questa, come riterremo, non sia tale da influire sul cammino libero medio degli elettroni. Dalla (4) ricordando che $c = N_M + N_M^+$ e tenendo conto delle (2) si ricava

$$(5) \quad AL = \frac{K_F N_F}{AL} + \frac{K_M c}{AL + K_M}$$

Sia L_0 il valore di L per $c = 0$ avremo dalla (4) $AL_0 = (N_E)_0 = (N_F^+)_0$, donde per le (2) $K_F N_F = A^2 L_0^2$ e potremo pertanto anche scrivere la (5)

$$(6) \quad AL = \frac{A^2 L_0^2}{AL} + \frac{K_M c}{AL + K_M}$$

Da questa relazione si ricava la (1) del Wilson, ove si ponga $L = l L_0$, cioè si attribuisca una conducibilità unitaria alla fiamma priva di sale alcalino ($c = 0$). Infatti dalla (6) si ottiene

$$c = \left(\frac{L^2 - L_0^2}{L} \right) \left(A + \frac{A^2 L}{K_M} \right) = \left(\frac{l^2 - 1}{l} \right) \left(\frac{A^2 L_0^2}{K_M} l + AL_0 \right)$$

⁽¹⁾ Wilson trova per la mobilità degli elettroni 2450 cm./sec. (Phys. Rev 3, pag. 375, 1914) e per la mobilità degli ioni positivi 1 cm./sec. (Phil. Trans. Roy. Soc. A, 216, pag. 71, 1915).

ossia

$$(7) \quad c = \left(\frac{v^2 - 1}{l} \right) \left(\frac{(N_F^+)_0^2}{K_M} l + (N_F^+)_0 \right)$$

Confrontiamo i coefficienti della (1) e della (7): $b = (N_F^+)_0$ è la concentrazione per unità di volume degli ioni positivi di F, quando $c = 0$, alla temperatura T della fiamma; $\alpha = \frac{(N_F^+)_0^2}{K_M}$ è il rapporto tra il quadrato di questa concentrazione e la costante di equilibrio per la ionizzazione del metallo alcalino alla temperatura T la quale, come è noto, è data da

$$K_M = \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{eV}{kT}} \quad (1)$$

ove m è la massa dell'elettrone, h è la costante di Planck, V il potenziale di ionizzazione del metallo presente.

Avremo pertanto

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha = (N_F^+)_0^2 \left(\frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{eV}{kT}} \\ b = (N_F^+)_0 \end{cases}$$

Ove si conoscesse il potenziale di ionizzazione V_0 di F e posto

$$c = (N_F)_0 + (N_F^+)_0,$$

si otterrebbe facilmente ⁽²⁾

$$(N_F^+)_0 = c_0^{1/2} \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/4} e^{-\frac{eV_0}{2kT}}$$

ossia il numero di ioni positivi $(N_F^+)_0$ in funzione della concentrazione per unità di volume delle molecole del prodotto di combustione F considerato, del suo potenziale di ionizzazione, della temperatura della fiamma e di costanti universali.

Diventerebbero le (8)

$$\begin{cases} \alpha = c_0 e^{-\frac{V_0 - V}{kT}} \\ b = c_0^{1/2} \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/4} e^{-\frac{eV_0}{2kT}} \end{cases}$$

(¹) Meg Nad Saha, loc. cit.

(²) Phil. Mag., 46, pag. 534, 1923.

Noti pertanto i valori dei potenziali di ionizzazione di F e di M e la temperatura assoluta della fiamma, è possibile mediante la (7) e le (10) calcolarne la conducibilità rispetto a quella assunta come valore unitario, e attraverso poi alla determinazione del cammino libero medio e della velocità degli elettroni presenti (che si può avere con buona approssimazione mediante i comuni metodi della teoria cinetica dei gas) è possibile risalire al valore di A e pertanto anche a quello delle conducibilità per la fiamma priva di sale.

Nel dispositivo sperimentale usato dal Wilson non ci sembra di poter specificare quale fosse la natura di F e quindi il suo potenziale di ionizzazione: potremo però ricavare indirettamente il valore di $(N_F^+)_0$ dal calcolo che il Wilson fa ⁽¹⁾ per la pressione parziale degli elettroni della fiamma senza sale, usando i dati sperimentali sulla sua conducibilità e ammettendo che in essa sussista una temperatura di 2000 gradi assoluti. Si ottiene così un valore $(N_F^+)_0 = 1,2816 \cdot 10^9$ da cui per la (9) si ha $V_0 = 8,05$ volta, potenziale di ionizzazione relativamente piccolo rispetto a quello degli elementi gassosi e il quale non può concernere appunto che qualche prodotto di combustione. A proposito della temperatura di 2000 gradi introdotta, convien notare che il Wilson misurava in realtà con una coppia termoelettrica nell'interno della fiamma 1923 gradi assoluti e che egli le attribuisce quella maggior temperatura perchè si deve ritenere la coppia più fredda della fiamma.

Assunto per $(N_F^+)_0$ il suddetto valore possiamo ricavare mediante le (8) i rapporti $\frac{b}{a}$ per i cinque elementi alcalini: il seguente specchietto ci mostra i valori di tali rapporti alla temperatura di 1900 e 2000 gradi.

ELEMENTI		Cs	Rb	K	Na	Li
Potenziali di ionizzazione		3,873	4,154	4,317	5,111	5,362
$\frac{b}{a}$	T = 1900	5,303	0,924	0,325	0,0024	0,00050
	T = 2000	19,094	3,631	1,386	0,00127	0,00289

Potremo inoltre dai valori dati dal Wilson ⁽²⁾ per $\frac{b}{a}$, e che egli determina empiricamente per far coincidere con la (1) i risultati sperimentali,

⁽¹⁾ Astroph. Journ. 127, pag. 31, 1923.

⁽²⁾ Astroph. Journ. 157, pag. 30, 1923.

ricavare le temperature effettive della fiamma all'atto delle misure di conducibilità: tali determinazioni saranno peraltro possibilmente affette da un piccolo errore per il modo come abbiamo determinato $(N_r^+)_0$ e perchè lo supponiamo costante, non potendo operare diversamente con i dati a nostra disposizione.

Si avrà approssimativamente

ELEMENTI	Cs	Rb	K	Na	Li
$\frac{b}{a}$	10	2,25	1,38	0,0160	0,0023
T	1947	1963	2000	2015	1988

ossia una media di circa 1982 gradi assoluti mentre la coppia ne segnava 1923 ed il Wilson ne assume, per le note ragioni, 2000. Le temperature calcolate rilevano una certa regolarità di andamento: crescono dal cesio al sodio per poi ricalare col litio, ma non ci sembra possibile dai dati del Wilson indagare se si tratti di non perfetta costanza della temperatura, nelle varie esperienze coi diversi sali, oppure di una caratteristica dei fenomeni studiati.

Ci resterebbe da fare la determinazione numerica della conducibilità e il suo confronto coi dati sperimentali, ci sembra però questo lavoro superfluo, perchè abbiamo giustificato i valori empirici delle costanti della formula del Wilson la quale è già stata da lui controllata coi dati sperimentali.

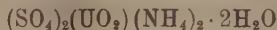
Concludendo: nell'ipotesi che in una fiamma contenente un sale alcalino vi sia equilibrio termico di ionizzazione tra esso ed un prodotto di combustione appartenente alla fiamma è possibile determinare teoricamente il valore effettivo della conducibilità elettrica, nella regione in cui vale la legge di Ohm, in funzione della temperatura della fiamma e di costanti universali e atomiche.

Sarà oltremodo interessante portare la teoria ad un'altra verifica più completa, servendosi della fiamma di un elemento gassoso con potenziale di ionizzazione ben definito, in modo di poter determinare con sicurezza la concentrazione degli ioni positivi quando non vi è il sale alcalino.

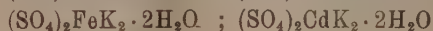
Chimica. — *Sul supposto isomorfismo dei composti di uranile con quelli dei metalli isomorfogeni del gruppo del magnesio* ⁽¹⁾.
Nota del dott. GUIDO CAROBBI, presentata dal Socio F. ZAMBONINI ⁽²⁾.

Nella letteratura appare abbastanza diffusa la convinzione, che l'uranile possieda una notevole analogia chimica con i metalli bivalenti del gruppo del magnesio, tanto da far pensare ad un possibile isomorfismo fra i composti corrispondenti dell'uranile e del magnesio, dello zinco, del ferro ferroso ecc.

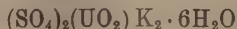
Così, per esempio, Groth nella sua *Chemische Krystallographie* (II, 483) ritiene probabile che l'uranilsolfato di ammonio diidrato



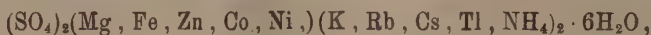
appartenga allo stesso gruppo dei composti triclinali



benchè, in base alle antiche misure di De La Provostaye ⁽³⁾, il sale di uranile risulti monoclinico, ma con somiglianze cristallografiche indiscutibili (ritiene sempre Groth) con la serie precedente. Lo stesso Groth ⁽⁴⁾ pensa alla possibilità di esistenza di composti

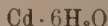
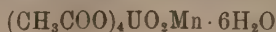


isomorfi con quelli della famosa serie



monoclinica.

Tutte queste supposizioni ed altre analoghe non sono state mai sottoposte ad un controllo sperimentale, tanto più necessario, se si pensa che vari composti ben definiti parlano contro l'isomorfismo dell'uranile con i metalli del gruppo del magnesio. Mi limiterò a ricordare gli acetati doppi seguenti:



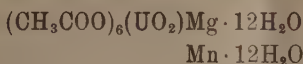
⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Napoli, diretto dal prof. F. Zambonini.

⁽²⁾ Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

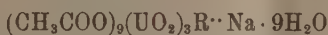
⁽³⁾ Ann. Chim. phys., 1842 (3), V, 51.

⁽⁴⁾ Loc. cit., pag. 421.

ed i corrispondenti nei quali Mg è sostituito da Fe, Ni, Co, Zn;



e gli acetati tripli di formula generale



dove R· indica un metallo del gruppo del magnesio.

In tutti questi acetati, non si ha il minimo accenno ad una sostituzione isomorfa dell'uranile al Mg, Fe, Zn, ecc.: al contrario, si hanno rapporti stechiometrici semplici e costanti in ogni serie di composti, fra UO_2 da un lato e Mg, Zn, Cd, Mn, ecc. dall'altro.

Anche fra i minerali, del resto, si hanno esempli di composti nei quali l'uranile e qualche metallo del gruppo del magnesio si trovano contenuti secondo rapporti costanti.

Valgano come esempio la torbernite $\text{Cu}(\text{UO}_2)_2(\text{PO}_4)_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ e l'arseniato corrispondente (zeunerite).

L'esistenza di questi sali doppi a composizione costante, non esclude, però, la possibilità di sostituzioni isomorfe dell'uranile al magnesio, allo zinco ecc. Appariva, perciò, necessario eseguire delle ricerche sperimentali, atte a definire la questione.

Iniziai queste ricerche cercando di ottenere un nitrato doppio di uranile e lantanio analogo a quelli della serie:



dove

$\text{R} \cdots = \text{Ce} \cdots, \text{La}, \text{Nd}, \text{Pr}, \text{Sm}, \text{Gd}, \text{Bi}$ e $\text{R} = \text{Mg}, \text{Zn}, \text{Co}, \text{Ni}, \text{Mn}, \dots$

La serie è nota da lungo tempo; i primi termini furono preparati da M. Holzmann⁽¹⁾, A. Damour e Sainte Claire Deville⁽²⁾, R. Bunsen⁽³⁾, Th. Lange⁽⁴⁾, H. Ziesche⁽⁵⁾, e di recente è stata studiata con gran cura da G. Jantsch⁽⁶⁾.

Disciolsi in acqua a freddo gr. 4,33 di $\text{La}(\text{NO}_3)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ e gr. 6,49 di $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, e posi il liquido a svaporare su acido solforico conc. a pressione ridotta. Dopo alcuni giorni si separarono dei cristalli gialli aghiformi o prismatici di $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, completamente esenti di lantanio. Aggiunsi altri due grammi di nitrato di lantanio, ridisciolsi il tutto e concentrai di nuovo su acido solforico concentrato. Si separò anche in queste condizioni il solo nitrato di uranile nettamente cristallizzato e ben ricono-

⁽¹⁾ Journ. prak. Chem., 75 (1858), 352; Jahresbericht, (1861), 187.

⁽²⁾ J., (1858), 135.

⁽³⁾ Lieb. Ann., 105 (1858), 40; Journ. prak. Chem., 73 (1858), 200.

⁽⁴⁾ Journ. prak. Chem., 82 (1861), 129.

⁽⁵⁾ Journ. prak. Chem., 107 (1869), 65.

⁽⁶⁾ Z. anorg. chem., 76 (1912), 303.

scibile per la forma dei suoi cristalli, ristudiati di recente estesamente dal prof. Quercigh ⁽¹⁾. Restava, così, dimostrata l'inesistenza, almeno delle nostre condizioni sperimentali, del nitrato doppio di uranile e lantanio corrispondente a quelli che il lantanio stesso forma con i metalli della serie magnesiaca.

Nell'ipotesi, però, che il composto in questione potesse stabilizzarsi nei cristalli misti derivanti da una solubilità almeno parziale allo stato solido fra il nitrato di uranile e lantanio e i nitrati della serie sopra ricordata, aggiunti alla soluzione dei nitrati di uranile e lantanio alcuni cristalli del sale $2\text{La}(\text{NO}_3)_3 \cdot 3\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 \cdot 24\text{H}_2\text{O}$ preparati a parte. Concentrando sempre su acido solforico a pressione ridotta si ottenne un primo deposito costituito esclusivamente da $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ in cristalli gialli aghiformi o prismatici e da piccole e sottili tavolette perfettamente incolori del tipo del nitrato doppio di lantanio e magnesio (trigonale scalenoedrico), senza traccia di UO_2 . I cristalli presentavano le forme $\{0001\}$, due romboedri $\{10\bar{1}1\}$ e $\{01\bar{1}1\}$ di Groth, con faccettine esilissime del prisma $\{11\bar{2}0\}$. Come differenza di *habitus* rispetto ai cristalli ottenuti senza la presenza del nitrato di uranile si può dire che questi erano più tabulari secondo la base, tanto da ridursi sovente a laminette molto esili.

Sempre seguendo le stesse direttive teoriche, posi a cristallizzare nelle condizioni sopradette due soluzioni contenenti rispettivamente gr. 0,5 di $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ e gr. 0,3 di $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$; gr. 0,5 di $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ e gr. 0,4 di $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$.

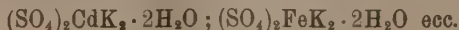
Dopo circa un mese, da ambedue i liquidi si separò una massa cristallina nettamente eterogenea costituita dai soliti cristalli rombici gialli di nitrato di uranile esaidrato e da minutissimi cristalli del tipo del nitrato di magnesio esaidrato perfettamente incolori nel primo caso, da cristallini di $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ anch'essi perfettamente esenti di UO_2 nel secondo caso.

Allo scopo di maggiormente convalidare le vedute teoriche esposte nella prima parte di questa breve Nota, estesi le mie ricerche ad altri tentativi di preparazione di sali contenenti l'aggruppamento bivalente UO_2 quale possibile sostituyente isomorfo di metalli del gruppo isomorfogeno del magnesio.

Come è noto, è stato già descritto da lungo tempo un composto



corrispondente perfettamente, come formula, ai sali



Però, mentre questi sono triclini, il composto di uranile, in base ad antiche misure di De La Provostaye ⁽³⁾ sarebbe monoclini. Poteva evidente-

(1) Rivista di mineralogia e cristallografia italiana, 44 (1915).

(2) Groth, *Chemische Krystallographie*, 2, 483.

(3) Ann. chim. phys., [3], 5 51 (1842).

mente trattarsi di un caso di isodimorfismo. Per verificare una tale ipotesi posi a svaporare a pressione ridotta su acido solforico una soluzione contenente gr. 1,20 di $\text{MnSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$, gr. 1,16 di K_2SO_4 e gr. 0,61 di UO_2SO_4 .

Si ottennero i cristalli del solfato doppio di manganese e potassio, che all'analisi si rivelarono completamente esenti di UO_2 anche soltanto in tracce misti a quelli del sale doppio di uranile e potassio.

Era possibile, inoltre, che l'uranile potesse sostituire, almeno parzialmente, il magnesio ecc. nella nota serie monoclina $\text{R} \cdot \text{R}' (\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, dove $\text{R} = \text{K}, \text{Rb}, \text{Cs}, \text{Ti}, \text{NH}_4$ e $\text{R}' = \text{Hg}, \text{Fe}, \text{Zn}, \text{Co}, \text{Ni}$.

Sciolsi in acqua a freddo:

gr. 1,44 di $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$, gr. 1,16 di K_2SO_4 e gr. 0,61 di UO_2SO_4 , e, poi, gr. 1,39 di $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$, gr. 1,16 di K_2SO_4 e gr. 0,61 di UO_2SO_4 e concentrammo le soluzioni su acido solforico a pressione ridotta.

Non ottenni cristalli misti in alcun caso.

Dalla prima soluzione si ebbero tre successivi depositi.

Il primo era quasi esclusivamente costituito da bellissimi cristallini monoclini del noto sale $\text{ZnK}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ e da qualche raro cristallino del sale di uranile.

Il secondo ed il terzo deposito erano costituiti, quasi del tutto, dal sale di uranile.

Sui cristalli di $\text{ZnK}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ da me ottenuti si può dire che erano molto tabulari secondo la base. Essi presentavano le faccie $\{001\}$, $\{110\}$, $\{201\}$ molto piccole, esilissime $\{111\}$, $\{120\}$, $\{011\}$. È interessante il fatto che la presenza del solfato di uranile non influisce sull'*habitus* dei cristalli, i quali, come risulta dalle ricerche di Tutton⁽¹⁾, hanno, appunto, questo abito, e spesso presentano il prisma $\{120\}$, raro negli altri solfati della serie e frequente in quelli contenenti zinco.

Dalla seconda soluzione si ebbe un primo deposito di solfato doppio esaidrato di Fe e K , costituito da grossi cristalli lievemente verdolini che spremuti alla pompa ed asciugati fra carta, si rivelarono completamente esenti di uranile. I cristalli erano schiacciati secondo la base, che misurava in alcuni casi 5 mm. nella direzione dell'asse b . In essi era fortemente esteso il pinacoide $\{20\bar{1}\}$. Presentavano le combinazioni $\{001\}$, $\{110\}$, $\{010\}$ piccolo, $\{20\bar{1}\}$, $\{11\bar{1}\}$ e $\{011\}$.

Nel secondo deposito era presente la maggior parte dell'uranile oltre a qualche altro cristallo del sale doppio ora descritto che formava quasi del tutto il primo deposito.

Concludendo: almeno nelle condizioni sperimentali in cui ho operato io, è da escludersi qualsiasi sostituzione isomorfa, anche parziale, dell'aggruppamento bivalente UO_2 ai metalli bivalenti del gruppo isomorfogeno del magnesio.

(¹) Journ. Chem. Soc., T. 63, 344 (1893); Z. für Krystall., 21, 494 (1893).

Spettrografia. — *Applicazione dell'analisi spettrografica alla ricerca di elementi rari in materiali italiani.* Nota preliminare di C. PORLEZZA e A. DONATI, presentata^a dal Socio R. NASINI (¹).

Già in precedenti Note (²) uno di noi aveva riscontrato la grande utilità connessa all'applicazione di tal metodo di analisi, che, richiedendo solo un tempo relativamente breve, può dare in molti casi preziosi indizi e servire di controllo e completamento all'analisi ordinaria, specialmente per quel che riguarda la identificazione di certi elementi rari o poco comuni che non danno altrimenti reazioni caratteristiche, o che sono presenti solo in piccola quantità.

Dalle ricerche allora esposte, inizialmente intraprese per consiglio del prof. Nasini, sono risultati anche alcuni fatti e alcune modificazioni del metodo originale di Urbain che qui riassumiamo:

1°) oltre a servirsi essenzialmente della parte violetta ed ultravioletta dello spettro d'arco, alla quale Urbain limita esclusivamente l'esame, può essere di grande utilità, specialmente in alcuni casi, di studiare lo spettro anche nella regione estendentesi verso il rosso, usando uno spettrografo che in questa regione dia una dispersione sufficiente;

2°) come in casi particolari era stato fatto da Urbain, e come nel citato lavoro è stato mediante esempî dimostrato, l'analisi globale pura e semplice del materiale in esame andrebbe completata in due modi: *a*) con l'esame spettrografico dei precipitati ottenuti nei singoli gruppi analitici e del residuo insolubile, eliminando se occorre la silice; *b*) con l'esame spettrografico di precipitati o residui ottenuti nel frazionamento dei precipitati dei singoli gruppi, nel caso specialmente in cui sia riuscito non abbastanza netto il risultato della ricerca precedente.

Le ricerche che sono oggetto della presente Nota hanno avuto essenzialmente lo scopo di estendere l'indagine spettrografica ad altri materiali naturali italiani, principalmente rocce, per individuare possibilmente elementi che per la loro natura o quantità possono sfuggire, specie se presenti in

(¹) Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.

(²) C. Porlezza, *Analisi spettrografiche di minerali e rocce in relazione alla presenza di elementi rari*, Pisa, Tip. Mariotti, 1921; Id., *Lo spettro d'arco del silicio in relazione all'analisi spettrografica*, Rend. Acc. Lincei, vol. XXXIII, 1° sem. 1924, pag. 193.

tracce; nello stesso tempo si desiderava stabilire, possibilmente, la presenza di elementi finora non risultati presenti in materiali italiani.

Pur riserbando di continuare e di completare queste ricerche e di darne al più presto una esposizione dettagliata e definitiva, desideriamo mettere in rilievo lo scopo del nostro lavoro ed alcuni dei risultati a cui siamo giunti, sembrandoci che essi possano offrire qualche interesse non solo per i casi particolari da noi considerati, i quali più specialmente si riferiscono a rocce, ma anche nel caso di minerali ben definiti; da un punto di vista più generale riteniamo poi che cosiffatti studi possano anche portare un contributo al modo di presentarsi dei vari elementi nello spettro d'arco.

Sotto questo aspetto le presenti ricerche si riconnettono ad altre che abbiamo in corso e in parte già ultimate, riguardanti gli studi sulla identificabilità e sensibilità spettrografica degli elementi col metodo dello spettro d'arco, analogamente a quanto han fatto Hartley, Pollock e Leonard e ultimamente De Gramont per lo spettro di scintilla; in queste ultime indagini abbiamo variato, oltre alle concentrazioni, anche la natura delle altre sostanze presenti, in modo da poterci riferire alle vere e proprie analisi spettrografiche.

Così crediamo di poter anche giungere, per quanto riguarda l'identificabilità, a poter stabilire in quali casi il metodo spettrografico, usufruendo dello spettro d'arco darà risultati più proficui, ottenendo utili indicazioni sul modo più conveniente di applicare tale metodo.

Speriamo anzi di poter trarre dalle ricerche sulla sensibilità spettrografica di ciascun elemento dei dati di riferimento di notevole importanza per poter anche apprezzare, sia pure in via di larga approssimazione, come può in parte farsi del resto anche per l'analisi qualitativa ordinaria, la quantità di ciascun elemento trovato.

In questa Nota preliminare riassumiamo intanto i risultati ottenuti dall'applicazione di tale metodo d'indagine analitica allo studio di alcuni materiali italiani che hanno avuto e che hanno attualmente anche per noi uno speciale interesse.

Alcune ricerche sono state eseguite da noi in collaborazione: analisi del tufo di Fiuggi, analisi della terra di Capri, analisi del granito di Castel d'Oria. Altre ricerche su campioni di lave dello Stromboli e di granito ha eseguite il dott. Donati da solo. Le fotografie son state prese tutte nella regione dello spettro compresa fra 4800 e 3850 Angström circa, poichè in questo momento siamo privi di uno spettrografo a quarzo, del quale speriamo però di poter disporre tra breve.

Tufo di Fiuggi. — Questo tufo così interessante dal punto di vista della sua radioattività ed anche perchè costituisce la principale roccia mineralizzatrice dell'acqua di Fiuggi, è già stato ripetutamente studiato. Ne fu eseguita una analisi qualitativa e quantitativa dal prof. F. Ageno, che già lo trovò costituito da numerosi elementi (rame, ferro, alluminio, titanio, man-

ganese, uranio, vanadio, calcio, bario, magnesio, sodio, potassio, litio, silice, acido fosforico, acido solforico, acido carbonico).

Fu contemporaneamente oggetto di studio da parte dei proff. R. Nasini e M. G. Levi per quel che riguarda la notevole radioattività e la possibilità di una concentrazione da esso di materiali radioattivi.

In seguito uno di noi si dedicò al dosamento dell'uranio e dei gas in esso contenuti e poi in collaborazione con L. Sicardi riprese lo studio della concentrazione delle sostanze radioattive in esso contenute.

Recentemente eseguendo l'analisi spettrografica globale abbiamo potuto identificare in parte gli elementi riconoscibili dell'analisi spettrografica col metodo dello spettro d'arco, fra quelli trovati già dal prof. Ageno e precisamente: ferro, alluminio, titanio, manganese, vanadio, calcio, bario, magnesio, potassio, silicio.

Il rame, l'uranio non han date righe perchè contenuti solo in tracce, e anche perchè la loro sensibilità nella zona studiata non è molto elevata; per il rame va tenuto conto anche dal fatto che tracce ne contengono anche i carboni da noi impiegati.

Il sodio ed il litio non si son potuti identificare, perchè presentano righe sfumate e che cadono in una zona che, nella fotografia in parola, presenta un fondo continuo di discreta intensità.

Tuttavia da questa prima analisi abbiamo potuto dedurre la presenza anche dello stronzio e del cromo non trovati nella analisi qualitativa per via umida.

Abbiamo quindi iniziato il frazionamento del tufo nel modo che esponiamo succintamente: facendo digerire il tufo con acido cloridrico a bagno maria abbiamo separato dapprima il residuo insolubile. L'analisi spettrografica di questo ha permesso di trovare lo zirconio; tale elemento fu anzi concentrato dal residuo in modo da ottenere una fotografia assai ricca delle sue linee caratteristiche.

Dalla soluzione cloridrica del tufo si è fatto dapprima separare la grande quantità di ferro presente per mezzo dell'ebullizione in presenza di acetato ammonico: contemporaneamente son risultati eliminati anche il titanio e in parte anche la silice con un po' di alluminio.

Dopo aver eliminato l'acido acetico ed i sali ammoniacali siamo passati alla precipitazione del secondo gruppo; esso è risultato insolubile in solfuro sodico, e l'analisi spettrografica, in esso ha accertata la presenza del piombo.

Il precipitato del terzo gruppo poi si è dimostrato assai ricco di terre rare: infatti abbiamo trovate molte linee del cerio e del lantanio ed anche le linee più caratteristiche dello scandio, del neodimio, dell'ittrio e dell'itterbio; esso conteneva poi oltre all'alluminio anche del cromo (già comparso con alcune righe anche nell'analisi globale), e tracce di altri elementi, rimasti come impurezze, dei gruppi successivi (manganese, calcio, bario, stronzio).

Nel precipitato del quarto gruppo abbiamo identificato il cobalto previa eliminazione del manganese e per via umida anche il nichel il quale però non aveva dato righe sufficienti per l'identificazione.

Riassumendo, col sussidio dell'analisi spettrografica abbiamo potuto identificare nel tufo di Fiuggi i seguenti elementi prima sfuggiti all'analisi ordinaria: cobalto, nichel, piombo, cromo, stronzio, zirconio, ittrio, itterbio, cerio, lantanio, scandio, neodimio.

Terra di Capri. — La terra di Capri era stata oggetto di studio per la sua rilevante radioattività: in seguito a ricerche di F. Giesel⁽¹⁾, questi poté ottenere da 60 chilogrammi di terra coltivabile (dal precipitato di solfato di bario ottenuto in soluzione cloridrica per concentrare una parte del radio) una piccola quantità di ossalati di terre rare del gruppo del cerio, in cui l'autore stesso aveva riconosciuta la presenza del didimio (nel lavoro è detto semplicemente: « forti linee del didimio »). Così anche per la terra di Capri volemmo tentare una ricerca più vasta degli elementi meno comuni. Il campione della terra adoperata ora stato ad uno di noi gentilmente fornito dal dott. Cuomo e prelevato nella stessa località, dove anche Giesel aveva raccolto il suo.

Il metodo di concentrazione fu analogo a quello già usato per il tufo di Fiuggi e fu eseguito su circa 25 grammi di sostanza.

Si poté identificare nel residuo insolubile accanto alla silice il titanio e per selezionamento rilevare anche la presenza dello zirconio sebbene in piccolissima quantità.

Il precipitato del secondo gruppo conteneva piombo e rame. Nel terzo gruppo, dopo eliminato il ferro, titanio, ecc., furono riscontrati ancora l'ittrio, l'itterbio, il cerio, il lantanio ed anche il neodimio, mentre lo scandio non dette una reazione tale da poter essere identificato con sicurezza. Risultarono presenti inoltre il manganese, cobalto, cromo, bario, stronzio, calcio. Il litio fu ricercato e trovato coll'osservazione spettroscopica oculare.

Complessivamente dalla analisi della terra di Capri si sono avuti i seguenti elementi: piombo, rame, ferro, titanio, alluminio, zirconio, silicio, ittrio, itterbio, cerio, lantanio, neodimio, cobalto, manganese, vanadio, cromo, bario, stronzio, calcio, magnesio, potassio, sodio, litio.

Granito di Castel d'Oria. — Il granito roseo di Castel d'Oria è anche esso sensibilmente radioattivo. Già il Serra aveva da esso separata la biotite ed aveva trovato che questa conteneva uranio.

Per quanto tale dato non potesse da uno di noi, con L. Sicardi, venire confermato, pure era stata riconfermata la radioattività di tale roccia ed era stata anche eseguita una concentrazione delle sostanze radioattive in esse contenute. Per quello che riguarda le presenti ricerche, una piccola porzione

⁽¹⁾ Berichte, 38, I, pag. 132 (1915).

di granito sottoposta all'analisi spettrografica globale ha dato come risultato la presenza dei seguenti elementi: manganese, stronzio, titanio, calcio, bario, ferro, vanadio, cromo, potassio, alluminio e inoltre indizio della presenza dello scandio, dell'ittrio e dell'itterbio; pur avendo a disposizione piccola quantità di campione fu tentata anche in questo caso una concentrazione.

Da una fotografia ottenuta dal residuo insolubile in acidi, dopo eliminazione della silice con acido fluoridrico, si identificarono le righe del manganese, titanio, stronzio, calcio, bario, ittrio, itterbio, assai deboli però per i due ultimi elementi citati.

Da una seconda fotografia ottenuta dal precipitato del terzo gruppo, dopo eliminato il ferro ed il titanio, si ebbero le righe del cromo, manganese, alluminio, titanio, stronzio, calcio, bario, ittrio, itterbio, scandio. Così i primi risultati avuti relativamente alle terre rare venivano completamente controllati.

Campioni di lava dello Stromboli. — Tre campioni di lava nera dello Stromboli, raccolti dal prof. Platania della università di Catania, ed inviati insieme a materiali eruttivi di altra specie al prof. Nasini, appunto per sottoporli all'analisi spettrografica, furono sottoposti a questa indagine e i tre spettrogrammi ottenuti furono confrontati fra loro. Sebbene i tre campioni presentassero colorazioni leggermente diverse, gli spettrogrammi non indicavano alcuna differenza qualitativa. Si limitarono quindi i trattamenti ad uno solo dei campioni per poter controllare ed eventualmente integrare i risultati forniti dall'analisi globale; questa aveva intanto permesso di identificare bario, cromo, potassio, stronzio, titanio, magnesio silicio, calcio, alluminio, manganese e di intravedere la presenza dello scandio e dell'itterbio. Dall'analisi del 2° gruppo risultò la presenza di tracce di piombo; da quella del precipitato del 3° gruppo risultò confermata la presenza dello scandio e dell'itterbio; siccome anzi lo scandio risultava in quantità relativamente alta, fu tentata una seconda concentrazione per potere identificare di questo elemento il maggior numero possibile di righe. Dall'insieme degli spettrogrammi ottenuti si può prevedere che tale lava contenga anche l'ittrio, sebbene la indagine spettrografica non abbia permesso di dedurne con sicurezza la presenza. Nel precipitato del 4° gruppo sono risultati presenti oltre al manganese, il cobalto e il nichel (quest'ultimo è risultato presente nell'analisi per via ordinaria). Per maggiore sicurezza, e questo vale anche per i materiali di cui è stato precedentemente parlato, è stato fatto anche il confronto con miscugli artificiali dei principali elementi riscontrati; in complesso in queste lave sono risultati presenti:

Mn, Sr, Ti, Ca, Fe, Ba, K, Al, Pb, Mg, V, Cr, Co, Ni, Sc, Yb, (Y).

Concludendo le ricerche ora esposte, pur avendo carattere preliminare e soprattutto provvisorio, inquantochè l'esame è stato forzatamente limitato ad una sola regione dello spettro, appaiono aver fornito risultati di un certo interesse, in ispecie riguardo allo scandio che, per quanto ci consta, è stato trovato in Italia solamente dal prof. Artini nell'esame della *bazzite* del granito di Baveno.

In successive Note esporremo i dettagli dell'indagine, che, ripetiamo, potrebbe integralmente applicarsi anche ai minerali, e speriamo di poter riferire anche sull'esame della parte ultravioletta.

Vulcanologia. — *I gas magmatici della lava dell'Etna raccolti col metodo dell'inalazione.* Nota di G. PONTE, presentata dal Socio MILLOSEVICH ⁽¹⁾.

In una Nota pubblicata in questi Rendiconti nel maggio 1922 ⁽²⁾ descrissi un apparecchio, col quale mi ripromettevo di raccogliere i prodotti volatili e gassosi delle lave fluide, prima che essi venissero a contatto con gli agenti atmosferici.

Il procedimento consiste nell'inalare nella lava un gas inerte e nel ritornarlo a raccogliere con le esalazioni che esso trascina.

L'inalatore può anche servire ad introdurre una corrente d'aria, di vapor d'acqua o d'altro mezzo ossidante nella lava per studiare le reazioni che vengono provocate.

In seguito alle recenti osservazioni, che hanno permesso di stabilire un'azione nettamente riducente dei magma basici ⁽³⁾, è stata scartata l'antica ipotesi acquosa, cioè che le lave fluenti possano tenere in soluzione del vapor d'acqua; però nella serie delle ricerche sinora fatte mancavano esperimenti sul terreno e questi sono stati fatti nelle lave della recente eruzione dell'Etna.

La bocca eruttiva laterale sul fianco NE del cono terminale dell'Etna, attiva sin dal 1911, nel maggio scorso diede delle piccole colate, che mi permisero di compiere, in condizioni eccezionalmente favorevoli, le esperienze che vengo a pubblicare.

Il 15 maggio aiutato dal custode dell'Osservatorio Etneo, Alfio Barbagallo, e dalla guida Matteo Galvagna, potei avvicinarmi ad un rivoletto di lava, largo poco più di un metro, che sgorgava dal dorso squarciato di una

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

⁽²⁾ G. Ponte, *Raccolta dei gas esalanti dalle lave fluide col metodo dell'inalazione.* Rend. Acc. Lincei, vol. XXXI, ser. 5^a, 1922, pag. 387.

⁽³⁾ A. Brunn, *Magmas anhydres et magmas aqueux.* Bull. de la Soc. franç. de minéralogie, t. XXXVII, janvier, 1914.

colata già in gran parte consolidata. La lava appariva discretamente fluida e difatti potemmo con debole sforzo introdurvi l'inalatore, favoriti dal vento che attenuava il calore irradiante dalla massa rovente.

L'arduo esperimento riuscì per il valido aiuto che ebbi dai due uomini, esperti conoscitori dell'Etna, temprati a tutte le fatiche di montagna e non ignari dei pericoli ai quali andavano incontro. Uno di essi manteneva l'inalatore nella lava, mentre l'altro sorreggeva i tubi adduttori.

In sostituzione del pirometro termoelettrico avevo collocato nella punta dell'inalatore una serie di dischetti di Seger che, a partire da 900°, di 20° in 20°, arrivavano a 1100°; essi servirono da ottimi indicatori della temperatura massima della lava durante l'esperimento.

Un sacco di caucciù della capacità di circa tre litri, munito di rubinetto e pieno d'azoto asciutto, era innestato al tubo adduttore dell'inalatore. Il tubo adduttore ed i tubi per la raccolta dei gas, come pure il refrigerante, erano tutti riempiti di azoto ed isolati dall'aria con chiusura a mercurio.

L'inalazione nella lava fu fatta con azoto puro, ottenuto dalla decomposizione del nitrito ammonico ed i gas magmatici furono raccolti per spostamento dell'azoto contenuto nei tubi. Perchè l'inalatore potesse funzionare fu necessario che attorno alla sua punta la lava formasse una bolla e per ottenere ciò bastò far fare allo strumento un lento movimento di va e vieni. In tal modo poté aversi una superficie di esalazione sempre rinnovata e l'azoto circolando nella bolla con lieve pressione trascinò fino ai tubi di raccolta i prodotti volatili e gassosi della lava. Il volume dell'azoto inalato fu circa un litro, cioè il doppio della capacità dei cinque tubi che servirono per la raccolta dei gas magmatici. L'inalazione durò circa dieci minuti e prima che fosse ritirato l'apparecchio dalla lava fu chiuso il rubinetto del refrigerante e furono strette tutte le mollette per la chiusura dei collegamenti di caucciù applicati ai tubi di raccolta. La saldatura delle estremità fusibili di ciascun tubo di vetro fu fatta poche ore dopo all'Osservatorio Etneo.

Dei dischetti di Seger collocati nella punta dell'inalatore, ne furono trovati fusi i primi tre, il quarto, che aveva il punto di fusione a 960°, non presentava alcun segno di vetrificazione; quindi io ritengo, che la temperatura della lava non abbia superato i 945°.

Il refrigerante apparve lievemente appannato da una esilissima polvere bianca, che restò attaccata alle sue pareti.

Ricambiati il tubo di quarzo, il refrigerante ed i tubi di raccolta, e rimessi i nuovi tappi fusibili ed un'altra serie di dischetti di Seger, l'inalatore fu presto pronto ad un secondo esperimento. Questa volta fu introdotto azoto umido nella lava, che fu spinto per mezzo dello stesso sacco di caucciù, adoperato nel precedente esperimento. Per rendere l'azoto umido fu introdotto

nel tubo adduttore di quarzo dell'apparecchio un filo di asbesto imbevuto d'acqua. L'inalatore così preparato fu immerso nella lava e ripetuto il solito movimento di va e vieni.

Appena fusero i tappi, che chiudevano i tubi di quarzo, incominciò a passare la corrente gassosa, che fu regolata aprendo lentamente il rubinetto del sacco di caucciù e guardando le bolle che sfuggivano attraverso il mercurio che chiudeva l'estremità dei tubi. Dopo circa un quarto d'ora, chiusi i rubinetti, estratto l'inalatore dalla lava ed esaminato il refrigerante esso apparve appannato da una esile rugiada.

La temperatura massima della lava fu di 940°.

Ecco i risultati delle ricerche analitiche fatte in laboratorio seguendo i più esatti metodi ⁽¹⁾ usati nelle analisi dei gas:

I°) a) *Sostanze condensate nel tubo di quarzo dell'inalatore e nel refrigerante durante l'inalazione dell'azoto*: cloruri di sodio e di potassio. Allo spettroscopio apparvero le righe del litio.

b) *Gas raccolti nei tubi durante l'inalazione con azoto asciutto*:

Percentuale in volume calcolata a 945° C. ed a 760 mm. di pressione:

CO ₂	1,61
CO	0,12
H ₂	0,43
SO ₂	0,14
CH ₄	0,08
Azoto inalato	97,62

II°) a) *Sostanze condensate nel tubo di quarzo dell'inalatore e nel refrigerante durante l'inalazione con azoto umido*: cloruri di sodio e potassio ed acqua clorurata con tracce di cloruro ammonico. Allo spettroscopio apparvero le righe del litio.

b) *Gas raccolti nei tubi durante l'inalazione dell'azoto umido*.

Percentuale in volume calcolata a 940° C. ed a 760 mm. di pressione:

CO ₂	2,14
CO	0,16
H ₂	2,13
SO ₂	0,23
CH ₄	0,16
Azoto dell'aria	95,18

Il primo esperimento dell'inalazione dell'azoto asciutto nella lava fluente ci fa conoscere che le esalazioni a quella temperatura ed in quelle condizioni siano privi d'acqua e quindi l'anidrità dei magma basici diventa, già, una constatazione scientifica. Se poi i gas raccolti non siano tutti elementi

(1) H. Frauen, Gasanalytische Uebungen, Leipzig. 1917.

costituenti del magma ed invece derivino da reazioni, che avverrebbero lungo il condotto eruttivo sotto l'influenza degli agenti atmosferici o degli inclusi trascinati dalla lava, che pur essi sono agenti perturbatori delle esalazioni gassose, è quello che, soltanto, le ripetute esperienze potranno confermare.

Il secondo esperimento dell'inalazione dell'azoto con vapor d'acqua nella lava ci mostra che il notevole aumento di gas sia prodotto dalle reazioni che provoca l'acqua.

L'acqua rinvenuta nel refrigerante rappresenta il residuo che non ebbe tempo di poter reagire durante l'inalazione. D'altro canto la constatazione fatta che fra i gas raccolti nella seconda esperienza vi fu un considerevole aumento d'idrogeno dovuto alla decomposizione dell'acqua, è una prova evidente che il magma sia un energico riducente.

Questi primi risultati, ottenuti col metodo dell'inalazione, c'inducono a sostenere che i gas esalanti dalle lave fluide siano, in parte, prodotti esogeni, cioè generati da reazioni del magma in presenza degli agenti atmosferici e specialmente del vapor d'acqua⁽¹⁾, che, come si è visto, viene decomposto dalle lave roventi ossidando alcuni elementi del magma e facendo aumentare la quantità dell'idrogeno. Evidentemente le lave sottraggono una considerevole massa del vapor d'acqua atmosferico; però ancora non sappiamo se la quantità d'acqua che verrebbe decomposta dal magma, lavico, sia maggiore di quella derivante dall'ossidazione dei gas idrogenati, che, in parte, bruciano nell'aria. Se una tale ipotesi venisse confermata, verremmo a constatare che il vulcanismo determina sulla Terra un lento impoverimento dell'ossigeno e del vapor d'acqua atmosferici.

Giacchè sembra che il vapor d'acqua e l'ossigeno siano i reagenti principali che provochino lo sviluppo dei gas vulcanici dalle lave, è interessante ricercare quali combinazioni contenga il magma, che possano essere decomposte rapidamente dagli agenti atmosferici per dar luogo a questi prodotti.

Nelle rocce eruttive all'infuori di alcuni solfuri di metalli pesanti non sono stati ancora riscontrati siliciuri, carburi, azoturi⁽²⁾, fosfuri. ecc. la cui reazione con l'acqua è ben evidente per l'abbondante sviluppo di prodotti gassosi. Però tali composti, come la cohenite, la schreibersite, la troilite, la lawrenzite, la daubrelite e la moissonite, sono stati riscontrati nelle meteoriti e se il nocciolo della Terra sembra sia costituito da metalli e composti metallici simili a quelli delle meteoriti, non è da escludere che nei focolai vulcanici possano trovarsi talune di queste sostanze, distribuite

(¹) Il vapor d'acqua può penetrare nel magma con gl'inclusi che la lava trascina lungo il suo percorso attraverso le anfrattuosità del terreno.

(²) La presenza della silvestrite o azoturo di ferro, rinvenuta dal Silvestri nelle scorie dell'Etna e dal Matteucci in quelle del Vesuvio, non è stata ancora riconfermata (vedi G. Ponte, *Studi sull'eruzione etnea del 1910*. Memorie dell'Acc. dei Lincei, vol. VIII, maggio 1911, pag. 686).

nel magma in particelle piccolissime, sfuggite sinora all'osservazione diretta. Se una tale ipotesi venisse confermata, sarebbero questi speciali composti quelli che reagendo con gli agenti atmosferici darebbero luogo ad un aumento dei prodotti gassosi, tra cui anche il metano, per quanto questo gas resti totalmente dissociato a 1200°; ma nelle lave dell'Etna non è stata riscontrata una così elevata temperatura.

Sinora l'esperienza ⁽¹⁾ ci ha fatto conoscere che, se una roccia, dalla quale in precedenza siano stati estratti nel vuoto tutti i gas che da essa si sviluppano alla temperatura d'esplosione, venga nuovamente riscaldata tra i 700° e gli 800° in corrente d'aria, d'ossigeno o di altro mezzo ossidante, si ha un notevole sviluppo di gas, che supera la quantità estratta precedentemente nel vuoto. Inoltre si conoscono alcuni minerali, componenti essenziali delle rocce, come l'olivina, che, riscaldati al rosso in corrente di vapor d'acqua, danno un abbondante sviluppo d'idrogeno ⁽²⁾. D'altro canto non è improbabile che altre sostanze, come carburi, azoturi, etc. possano pure trovarsi nel magma lavico e che ad elevata temperatura ed in presenza degli agenti atmosferici diano quei composti gassosi dei quali una parte resterebbe disciolta nel magma, mentre l'altra verrebbe fuori durante la fase di parossismo.

Zoologia. — *Nuove osservazioni su luminescenza e simbiosi:*

II. *La fosforescenza dei ctenofori.* Nota del prof. UMBERTO PIETRANTONI, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽³⁾.

Continuando i miei studi sugli animali luminosi e sulle cause che determinano il fenomeno della luminescenza, ho avuto di recente occasione di compiere nuove ricerche su altri gruppi di animali luminosi, ed i primi risultati comunico in questo breve scritto, che ha carattere del tutto preliminare.

È noto che molti ctenofori sono segnalati fra gli animali più brillantemente fosforescenti che vivono nel mare. La luce dei baroidei specialmente è assai vivace e spesso anche lungamente persistente sotto stimoli o quando gli animali siano immersi in acqua dolce. La luce appare lungo linee corrispondenti ai canali meridiani del sistema gastrovascolare. Anche su questi animali e sul loro modo di riflettere si hanno interessanti osservazioni negli studi del Panceri. Tuttavia solo di recente si è tentato di scendere più a fondo nella conoscenza della vera sorgente luminosa dei ctenofori ed alcune

⁽¹⁾ A. Brun, *Recherches sur l'ëthélation volcanique*. Ginevra. 1911.

⁽²⁾ A. Brun, *Action de la vapeur d'eau à haute température sur certains silicates éruptifs*. Bull. de la Soc. franc. de minéralogie, t. XXXVIII, nov., 1915.

⁽³⁾ Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

osservazioni istologiche si devono al Dahlgren⁽¹⁾, che, studiando su *Pleurobrachia*, affermò che la luce è prodotta da cellule differenziate dell'epitelio dei tubi gastrovascolari costali, specialmente della parte del tubo che guarda le lamelle vibratili. Ora poichè le cellule delle pareti di questi tubi sono già differenziate in parte in cellule sessuali, le cellule luminose sarebbero disposte in una linea ispessita frapposta fra le due masse di cellule sessuali.

Tali cellule fotogene si distinguono, secondo il Dahlgren, per il loro aspetto vacuolato, per essere provvedute di grossi nuclei e per la presenza, nella loro porzione protoplasmatica, di gruppi di granuli, accompagnati da masse di una sostanza che si colora come i granuli, ma la cui natura è restata ignota all'autore.

In un suo recente lavoro il Buchner⁽²⁾ dichiara di aver rinvenuto, nelle cellule luminose di ctenofori, nidi di corpuscoli, che egli non indugia a considerare come microrganismi simbiotici; ma, per quanto egli ponga senz'altro questi animali fra quelli i cui organi fotogeni sono batterici, egli dà solo brevi notizie sulla struttura di questi organi, che è riuscito a studiare soltanto su preparati di sezioni. Egli osservò specialmente *Beroë ovato* e *Pleurobrachia pileus*.

Riprendendo tale studio io ho avuto occasione di esaminare *Bolinopsis vitrea* (= *Bolina hydatina*) e *Beroë forskali*, coi seguenti risultati. Le cellule luminose di *Bolinopsis vitrea* sono diffuse uniformemente su tutte le parti della parete dei vasi costali ove vi è produzione di cellule sessuali, alle quali le cellule luminose si sovrappongono restando da un lato a contatto di queste e dall'altro sporgendo verso il lume dei canali medesimi. Hanno tali cellule un aspetto del tutto particolare pel loro plasma vacuolato e pel nucleo spostato verso la parete cellulare. Le vacuole contengono corpuscoli di varia natura, di cui alcuni sferulari poco colorabili con l'ematossilinea, altri colorabilissimi e di forma sferica ed un po' allungata, talora presentanti una piccola gemma, come i blastomiceti in via di moltiplicazione. La lunghezza di questi corpuscoli è di circa 3 μ , per 1 $\frac{1}{2}$ di larghezza. Molti di questi corpuscoli intensamente colorabili si trovano anche fuori delle cellule e nel plasma delle uova limitrofe.

In *Beroë forskali* le cellule luminose sono ugualmente ripartite come in *Bolinopsis*, ma un po' differenti per la loro struttura. Esse somigliano più a quelle riscontrate dal Dahlgren in *Pleurobrachia*. Infatti la loro parte protoplasmatica è ampiamente vacuolata, ma le vacuole si presentano vuote, mentre la parte protoplasmatica contiene il nucleo spostato da un lato e nel

(¹) Dahlgren U., *The production of light by animals. Porifera und Coelenterata.* Journ. Frankl. Inst., 1916.

(²) Buchner P, *Tier und Pflanze in intrazellulärer Symbiose*, pag. 340, Die Leuchtsymbiose, Berlin, 1921.

mezzo gruppi di corpuscoli, di cui alcuni più grandi e colorabilissimi appaiono come grosse masse di sostanza cromatica.

Tanto nel caso di *Bolinopsis*, come di *Beroë*, l'aspetto e la forma dei corpuscoli sono molto suggestivi e spiegano le conclusioni a cui è giunto il Buchner, quando, osservando altri ctenofori si è indotto a porre questi animali fra quelli che hanno organi luminosi simbiotici. Tuttavia io, volendo concludere in tal senso solo quando ne abbia avuto delle prove irrefutabili, voglio solo affermare che mi fanno propendere dalla parte delle conclusioni del Buchner, oltre che l'aspetto dei corpuscoli, la grande somiglianza esistente fra le cellule luminose di *Bolinopsis* e quelle di *Pyrosoma*, in cui le particelle luminose (batterii) sono ugualmente disposte entro vacuoli del plasma ed assumono caratteri di speciale colorabilità quando stanno per abbandonare le cellule (ossia quando assumono il carattere di spore).

Le masse oscure che accompagnano i corpuscoli sono state rinvenute anche in molte cellule simbiotiche ed interpretate come masse batteriche in via di disfacimento. Ne trovò recentemente anche Mortara (1) negli organi fotogeni di *Abralia veranyi* (in cui le forme bacillari delle cellule della sorgente luminosa sono evidentissime) e dalla stessa autrice dichiarate come interpretabili per « gocce nelle quali i batteri simbiotici si andrebbero disfacendo per aver già compiuto la loro funzione », per quanto l'autrice stessa si dichiara poi in quel caso contraria alla teoria simbiotica della fotogenesi. È certo tuttavia che di queste gocce, fatte della stessa sostanza dei granuli o batteri simbiotici, ne furono trovate ovunque vi sono organi simbiotici chiusi, ossia i cui batterii esuberanti per l'attiva riproduzione non trovano sfogo attraverso speciali aperture che possano rigettarli all'esterno. Non si rinvencono quindi negli organi fotogeni aperti di *Sepiola* e *Rondeletia* da me studiati, nè in quelli dei pesci studiati da E. Newton Harvey (2).

Come ammassi di funghi in via di essere fagocitati, e quindi in dissoluzione, furono interpretate anche da Noël Bernard uguali masse che si rinvennero nelle cellule di orchidee provvedute di micorize.

Tutto quanto è detto sopra, insieme col fatto constatato dallo stesso Harvey (3), che in *Bolinopsis* non si riesce ad isolare le due sostanze che si trovano costantemente quando la presenza dei batterii non è evidente negli organi luminosi, e cioè la luciferina e la luciferasi, deporrebbe decisamente in favore della interpretazione simbiotica della luminescenza nei ctenofori da me studiati.

(1) Mortara S., *Gli organi fotogeni di Abralia veranii*. Mem., XCV, R. Com. Talass. Ital., 1922.

(2) Harvey E. Newton, *The production of Light by the fishes Photoblepharon and Anomalops*. Publ. n. 312 of Carnegie Inst. Washington, pag. 47.

(3) Harvey E. N., *Studies on Bioluminescence: XIII. Luminescence in the Coelenterates*. Biol. Bull., vol. 41, pag. 285.

Tuttavia io non saprei affermarlo definitivamente, poichè manca la prova delle colture. La speciale posizione degli organi fotogeni dei ctenofori innanzi descritta rende impossibile la completa sterilizzazione esterna dei tessuti che contengono le cellule a corpuscoli, onde la prova degli innesti, anche se positiva, non può essere in alcun caso convincente.

Ne consegue che nei ctenofori esiste una serie di circostanze le quali, se da una parte non impongono di escludere la esistenza di una simbiosi fotogena batterica, anzi la rendono assai verosimile, dall'altra non permettono di affermarla come irrefutabilmente provata.

Biologia. — *Intorno al differenziamento del sesso nell'anguilla* ⁽¹⁾. Nota del dott. UMBERTO D'ANCONA, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽²⁾.

Sulla questione della determinazione del sesso nell'anguilla, Grassi arrivava nella Memoria del 1919 ⁽³⁾ alle seguenti conclusioni:

Nelle anguille, o almeno in un certo numero di esse, il sesso viene determinato metagamicamente da condizioni ambientali. Le cieche piccole sono probabilmente destinate a diventare maschi, mentre invece le medie e le grandi possono diventare maschi o femmine a seconda dell'ambiente in cui si sviluppano.

Grassi basava queste conclusioni, fra altro, su alcuni allevamenti in vasca. Non soltanto le cieche di lunghezza inferiore ai 60 mm., ma anche quelle superiori ai 75 davano quasi esclusivamente maschi, mentre gli allevamenti fatti in bacini più vasti e con condizioni ambientali migliori dal Bellini avevano dato maschi nel primo caso, femmine nel secondo.

L'allevamento delle cieche lunghe da 75 mm. in su fu iniziato dal Grassi il 25-XI-1913 con 250 esemplari; dal dicembre 1920 continuai io l'esperienza fino al 28-III-1923. Nell'aprile 1916 le anguille erano ridotte a 121; dal novembre 1917 in poi ne furono esaminate 69, alcune erano morte, in parte notevole erano sfuggite per difetto di costruzione della vasca. Di queste 69, 5 erano diventate femmine in confronto a ben 61 maschi o quasi certamente avviate a diventare tali e a 3 incerte ⁽⁴⁾. Va ricordato che gran parte di queste anguille, che erano state tenute in vasca per quasi 10 anni, non erano diventate nè argentine, nè erano molto cresciute ⁽⁵⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

(3) Grassi B, R. Com. Talass. Ital., Mem., LXVII, 1919.

(4) Nastrino senza uova, probabilmente maschi.

(5) In seguito darò più dettagliatamente i risultati di queste esperienze.

Tali risultati apparentemente contraddittori con quelli di Bellini, sono evidentemente da ascrivere alla differenza dell'ambiente.

Si può pure escludere trattarsi di mortalità selettiva, perchè se anche fossero morte o sfuggite esclusivamente le femmine (cosa inverosimile) esse avrebbero potuto costituire appena il 75,6 % (61 su 250 esemplari erano diventati sicuramente maschi), mentre secondo il Bellini tutte le cieche dell'esperienza dovevano diventare femmine.

Se vogliamo vedere quali sono le cause ambientali che possono determinare lo spostamento delle proporzioni fra i due sessi, sembra poco verosimile che si possa attribuire tale effetto all'alimentazione, perchè nel nostro allevamento la nutrizione fu sempre abbondante e variata; si possono invece ammettere con Grassi come fattori esterni determinanti il sesso la ristrettezza delle vasche, la bassa temperatura dell'acqua, ecc.

Da questa serie di esperienze risulta dunque confermata la tesi di Grassi che nell'anguilla il sesso non sia sempre determinato all'atto della fecondazione, ma che ciò possa avvenire in un periodo di sviluppo più o meno avanzato.

Mentre secondo Mazza (1907) la differenziazione sessuale avverrebbe soltanto dopo raggiunta la lunghezza di 38 cm., secondo Giacomini gli organi genitali femminili sono già riconoscibili in anguille di poco superiori ai 200 mm. (la più piccola da lui trovata aveva soltanto 217 mm.), quelli maschili invece sono riconoscibili in esemplari da 179 a 194 mm., meglio ancora in quelli di 200 mm. Il differenziamento sessuale avverrebbe in individui di 200 mm. e con molta probabilità anche prima.

Invece Grassi ritiene che la gonade può tendere a diventare ovario tipico anche quando l'anguilla non ha raggiunto i 20 cm., ma osserva che dai 21 ai 33 cm. circa la percentuale delle femmine aumenta notevolmente, il che implica un differenziamento in forme più o meno grandi.

Per determinare l'epoca in cui si inizia il differenziamento sessuale rimaneva un'altra via da seguire: vedere se nelle piccole anguille inferiori ai 20 cm. di località in cui prevalgono i maschi, rispettivamente le femmine, si nota qualche accenno a un differenziamento sessuale⁽¹⁾.

Nel giugno (29-VI) dell'anno scorso ho potuto avere, per un caso eccezionalmente favorevole, un certo numero di anguille del lago di Porto (in cui prevalgono le femmine) di lunghezza tra i 13 e i 24 cm. Come materiale di confronto ho usato alcuni esemplari delle stesse dimensioni circa (17-21 1/2 cm.) presi nella stessa epoca (6-VII) nel Canale Navigabile di Fiumicino (in cui prevalgono i maschi).

(1) Grassi cita come esempi di località dove abbondano le femmine Biella e Alberrone (frazione di Chignolo Po, prov. di Pavia); località dove prevalgono i maschi i canali delle bonifiche di Fiumicino e Maccarese (Roma). Un'altra località con prevalenza di femmine fu trovata in seguito nel piccolo lago di Porto presso Fiumicino.

Delle 47 anguille di Porto esaminate, 3 (lunghe 20,20 $\frac{1}{2}$ e 23 cm.) avevano lobi ben distinti, 3 (lunghe 21,21 $\frac{1}{2}$ e 22 cm.) avevano nastrini con accenni di lobi, tutte le altre 41 avevano nastrini senza traccia di lobi, nè di pieghe. Delle 14 anguille del Canale Navigabile, una sola (lunga 20 cm.) presentava qualche traccia di lobi, le altre tutte avevano nastrini senza accenno a lobi.

Della maggior parte di queste anguille le gonadi furono colorate col picrocarminio e montate *in toto*; parecchie furono anche sezionate. Dall'esame di questi preparati risultò che in parecchie si vedevano delle cellule germinative già nel periodo di accrescimento, evidentemente oociti. Come risulta dalle ricerche di Grassi la presenza di oociti sparsi è comune sia nelle gonadi destinate a diventare ovari che in quelle che diventeranno testicoli. Invece Grassi ritiene che la gonade sia destinata a diventare un ovario quando le uova o i nidi di sinapsi sono molto abbondanti, benchè non ci siano ancora le pieghe e chiama tali gonadi *preovari*.

Fra le anguille di Porto ho trovato soltanto in 5 esemplari una certa abbondanza di tali oociti, le lunghezze erano 13, 15 $\frac{1}{2}$, 21 ⁽¹⁾, 21 $\frac{1}{2}$, 23 ⁽²⁾ cm. ⁽³⁾. Le grandezze massime degli oociti di questi esemplari erano rispettivamente di 16, 21, 16, 13 e 21 μ . Fra le anguille del Canale Navigabile nessuna presentava oociti così abbondanti come le 5 di Porto. In parecchie, sia di una che dell'altra provenienza, si notavano nidi di sinapsi.

Un altro carattere che secondo Grassi, almeno in alcuni casi, indicherebbe il sesso maschile, sarebbe il così detto *canale deferente*. Io però non ho potuto trovare un accenno di questo canale che in una sola (lunga 21 $\frac{1}{2}$) fra le anguille di Porto a tal fine esaminate e in una (lunga 19 $\frac{1}{2}$) fra quelle del Canale Navigabile. Anche Grassi ha trovato questa formazione appena in esemplari lunghi 21 e più cm.

Dunque nella maggior parte delle anguille, sia della località in cui dovevano diventare prevalentemente femmine, che di quella dove dovevano diventare prevalentemente maschi, non si nota alcun accenno a un differenziamento sessuale. Forse un differenziamento verso il sesso femminile l'abbiamo nelle anguille in cui trovo abbondanti cellule germinative in fase di accrescimento. Benchè l'accrescimento sia ancora poco avanzato, possono considerarsi oociti e dato il loro numero è probabile che la gonade era destinata a diventare ovario.

In complesso mi sembra che la differenziazione del sesso può avvenire in periodi di sviluppo molto svariati, che generalmente essa non avviene in individui inferiori ai 20 cm., ma che in certi casi ciò può aver luogo molto

⁽¹⁾ Nastrino con accenno di lobi.

⁽²⁾ Lobi distinti.

⁽³⁾ Mi rimane qualche dubbio sui preparati dell'anguilla lunga 13 cm. perchè mai riusciti.

precocemente, anche a soli 15 $\frac{1}{2}$ cm. (non tengo in considerazione l'esemplare dubbio di 13 cm.).

Da questi miei risultati appare dunque sempre più confermata l'opinione di Grassi. Potremo dire che in una parte delle anguille il sesso è determinato anche prima dei 20 cm. ma che in un'altra parte, pur essendoci forse maggior tendenza verso un sesso che verso l'altro, anche in epoca più avanzata fattori esterni possono modificare tale tendenza facendo sviluppare un sesso piuttosto che l'altro.

Tale reperto non è isolato tra i Vertebrati. Ricorderò le ricerche di Witschi sulle rane. Egli distingue *razze differenziate* e *razze indifferenziate*. Nelle prime già nel periodo larvale si hanno 50 % di femmine e 50 % di maschi, nelle seconde invece alla fine della metamorfosi tutte hanno ovari sviluppati, però sotto svariate condizioni ambientali (sovrammaturazione, temperatura) si possono sviluppare maschi piuttosto che femmine.

Contro tali conclusioni di Witschi ha sollevato delle critiche lo Swingle⁽¹⁾, il quale nella *Rana catesbeiana*, che ha un lungo periodo larvale (2 anni) distingue un ciclo sessuale precoce che abortisce, un tale ciclo ci sarebbe anche in *R. temporaria* ed *esculenta*, in queste andrebbe però soltanto fino allo stadio di pachitene; considera tale ciclo sessuale precoce come un *protesticolo* che poi scompare. Ritieni invece che le cellule considerate oociti dal Witschi siano una degenerazione oviforme delle cellule del protesticolo. Tale protesticolo sarebbe paragonabile all'organo di Bidder dei rospi maschi, anche in questo ci sarebbe una degenerazione oviforme. L'A. trova inoltre che in *R. catesbeiana* la maturazione delle cellule sessuali maschili e femminili è contemporanea. Questo anche secondo l'A. sarebbe un caso unico tra i Cordati, però egli suppone che qualcosa di simile possa trovarsi nei Missinoidi, nei Petromizonti e nelle Anguille.

A queste conclusioni dello Swingle qui non posso per ragioni di spazio far seguire tutta quella discussione che sarebbe necessaria. Mi limiterò a dire che Harms⁽²⁾ è riuscito in rospi maschi castrati a far sviluppare gli oociti dell'organo di Bidder in cellule ovariche normali. In quanto poi alla contemporanea maturazione degli elementi sessuali maschili e femminili, essa non avviene, secondo Witschi, nelle rane europee; nella lampreda americana, *Entosphenus wilderi* secondo le ricerche di Okkelberg⁽³⁾ si hanno pure gli stadi di sinapsi precocemente negli elementi femminili in confronto agli elementi maschili. Per le anguille poi si osserva che i processi pseudoriduttivi precedono sempre il periodo di accrescimento che conduce alla formazione di grossi elementi, per i quali ci sono tutte le

⁽¹⁾ Swingle W. W., Journ. exp. zool., vol. 32, pag. 235, 1921; id., Am. Natur., vol. 56, pag. 193, 1922.

⁽²⁾ Harms J. W., Naturwissenschaften, Jahrg. XI, pag. 897, 1923.

⁽³⁾ Okkelberg P., Journ. of morph., vol. 35, pag. 1, 1921.

ragioni per considerarli oociti, mentre non ce n'è alcuna per ritenerli spermatogoni in degenerazione oviforme.

Un altro caso analogo a quelli degli Anuri e delle Anguille è stato trovato dall'Okkelberg nei Petromizonti. Nell'*Entosphenus wilderi* l'A. trova un ermafroditismo giovanile; in certi casi gli individui sono più inclinati verso il sesso maschile, in altri verso quello femminile, in altri ancora le potenze dei due sessi sarebbero uguali e piccole influenze esterne basterebbero a determinare un senso piuttosto che l'altro.

Questi casi degli Anuri e dei Petromizonti appaiono perfettamente simili a quello delle Anguille e forse si troveranno tra i Vertebrati anche altri casi di una determinazione tardiva del sesso.

G. C.
